BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III
XXXV
A
38
NAPOLI

XV
A
38

Digitized by Google

Digitized by Google

Puncti. A — B

Lineae.

A —— B

XXVI. X. 23

Digitized by Google

[illegible]

Digitized by Google

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBRI SEX.

Ex traditione Federici Commandini.



AZIONALE "VITTORIO
NAPOLI

NEAPOLI,

Typis Novelli de Bonis Typograph. Archiep. 1679.

Superiorum facultate.

Sumptibus Coſmi Fioravanti.

Digitized by Google

ILLUSTRISSIMO,
ET EXCELLENTISS. DOMINO

D. DOMINICO MARTIO CARAFÆ

MAGDALUNENTIUM DUCI,
ARGENTII MARCHIONI,
CERRETI COMITI, &c.

HAud multùm dubitatio me tenuit, Princeps Excellentiſſime, cuinam hoſce Euclideos Libros non immeritò dicarem. Statìm enim atque Typographis excudendos eos tradidi, eæ meæ fuerunt cogitationes, ut tui nominis claritate illuſtrati, orna-

Digitized by Google

tique viderentur. Et ſanè quidem, ſi ea animaduerterim conſilia, quibus ſapientes etiã homines ſuis ſolent opuſculis præſtantiſſimos viros donare; ſi ea, inquam, inſpexerim, quantò id ego erga te ſapientius efficiam, in quo ſanè ſplẽdeſcere ea omnia munera videmus, quæ immortalitatis teſtimonium ex ſe exhibent. Nec id mihi propoſitum nunc ſit credas inter cætera, quæ habes ornamenta tuorum quoque facta me connumerare; cum vix tua, quibus illorum laudes obſcuraſſe quodammodo videris, enarrare mihi nunc liceat. Adde quod nec id facilis mihi foret negotii, et ſexcenties commemorata redicerem, quodque etiam perperam facerẽ. Quis eſt etenim, qui in te uno non videat quæque

bel-

belli, domique majores tui probè, ſtrenuèque geſſerunt? plures inquā Diomedes, et penè innumeri Thomas, Martii, aliique, et pietate inſignes, et omni militari ingenio præditi. Quin etiam in te uno vigent virtutes omnes, quarū ſingulæ optimum quemque decorarent. Quippè, ſi aliquarum meminiſſe velimus, in te admodum humanitas, et majeſtas benè convenerunt, ut ad tui amorem, et obſervantiam an allicias potiùs, dubium ſit, an potius impellas noſtrum omnium animos. Munificentia autem tua quid jucundius? Qui te enim in ipſa exercenda antecellat nemo eſt, ne dicam, quem tecū parem conferamus; tam largè, tam ſapienter tua impertiris beneficia optimis ſcilicet viris, ac de bonis artibus

benè meritis, quos inter ſæpenumero tibi libet otium conſumere. Unde Philoſophos inter, Mathematicos, atque Poetas ſummam tibi dignitatem es aſſequutus. O aurea, ò feliciora tempora, in quibus dominantur ſapientes, philoſophātur Principes! Auguſti haud equidem invideremus ætati, ſi par animo, & imperiū inclyto Martio Fato conceſſum eſſet. Sed cum tuas laudes, quarum maxima eſt, Princeps Sapientiſſime, in contemptione, ac deſpicientia laudem te poſuiſse, referri non patiaris ob tui animi magnitudinem, illas iccirco ſilentio præteream. Tu tamen quod tibi humili, ac devoto animo munuſculum offero, humaniter ſuſcipias in meæ erga te obſervantiæ teſtimonium. Quod ſi

ſe-

feceris, mei voti compotem ſatis ſuperque me efficies. Vale igitur ſummum ætatis noſtræ Decus.

Excell. Veſtræ

Obſequentiſs. ſeruus
Coſmus Fioravanti.

An-

Digitized by Google

Digitized by Google

Antonii à Capua

DE D. DOMINICO MARTIO
Magdalunentium Duce

Carmen

Ad Julium Accianum.

F*Ert animus laudes, Juli, partoſque triumphos,*
Alta quibus nomen ſe tollit Martii ad aſtra
Ordiri. Neget Italico quis carmina Marti
Inſigni pietate ſimul, belloque potenti?
Quem meritò, vt clarum Siren decus Urbis, & Orbis,
Sebethuſque colit. Mens deficit aſt, animuſque
Grandia ſectanti mihi, nec deterrita cæptis

Mu-

Digitized by Google

Muſa aſpirat, nequicquam veſtigia calcans,
Quæ poſt Argolicas Latiæ preſſere Camenæ.
Tu tamen, ò Patriæ, ò ſecli lux unica noſtri,
Quem cithara, quemque arte ſua donavit Apollo,
Maxime Iuli vatum, ſuſcipe viribus æquam
Materiam, reſonetque immenſis Martii olympus
Laudibus æternus; lumenque ut clarius edit
Fax geminata; tuis poterit ſic maximus Heros
Verſibus æternum ſic tu fulgere viciſſim
Virtute illius: mihi namque ſiluiſſe licebit.

Stu-

Studioſis Geometriæ S. P. D.

Coſmus Fioravanti.

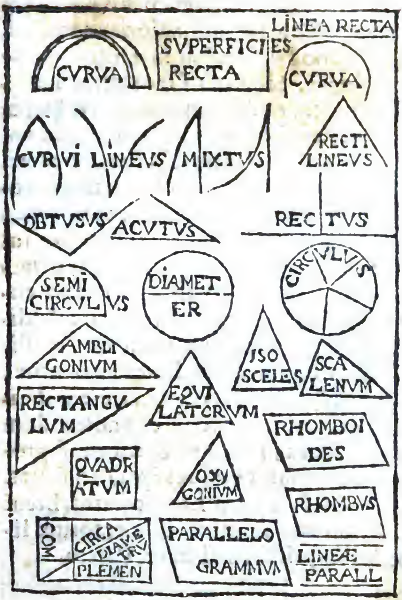
MIrabitur fortè aliquis, quod ad Elementorum Geometricorum impreſſionem animum appulerim, quando ſatis magna eorundem copia ubique venalis extat. Verùm duo potiſſimùm mihi animum addidere, vt pecuniam in hos ſumptus erogarem: alterum eſt, quod tanta errorum illuvies in Veneto Codice reperitur, qui ut plurimùm tyronum manibus teritur, ut ne legi quidem, nedùm intelligi poſſit; alterum ejuſdem libelli neceſſitas, ſine quo fruſtrà ſcientiarum fores pulſantur, unde clariſſimus Galilæus, qui primus Philoſophiam Mathematicæ ſociavit, in Epiſtola ſivè mavis libello, cui nomen fecit *il Saggiatore* ait: *La Filoſofia è ſcritta in queſto grandiſſimo libro, che*

con-

continuamente ci ſta aperto innanzi à gl'occhi (io dico l'uniuerſo) ma non ſi può intendere ſe prima non s'impara à intender la lingua, e conoſcer i caratteri, ne' quali è ſcritto: egli è ſcritto in lingua matematica, & i caratteri ſono triangoli, cerchi, & altre figure geometriche, ſenza quali mezzi è impoſſibile à intenderne umanamente parola; ſenza queſti è un aggirarſi vanamente per un'oſcuro laberinto. Atque hinc deſinant plerique inſulsè quærere, cui bono hæc addiſcantur, ne illis contingat, quod & olim mihi Florentià diſcedenti, nàm ubi primùm Liburni navigia proſpexi altiſſimis malis aliiſque quam multis inſtrumentis inſtructa, mecum rebar ad hoc parata eſſe omnia, ut animi levandi gratia liceret Nautis malorum vertices ſcandere, quò latiores Maris tractus cernerent, & frigidiuſculam auram captarent, nec alii prætereà uſui eſſe. Cum verò vela aptari vidi, & tam variorum inſtru-

men-

mentorum ope navium curſus regi, tùm primùm ſenſi aliquid majoris momenti, quam quod ſuſpicabar in tanto apparatu ſubeſſe. Similiter Geometriæ neceſſitatem atque admirandos uſus iis ſpontè manifeſtos futuros auguror, quibus contigerit his elementis feliciter perceptis ad ſcientiæ culmen pervenire, ſecùs profectò ignotæ artis myſteria perſpecta habere velle inſania eſt. Commandini verſionem præ cæteris ſelegimus, cum ea per quam breuis ſit, & græco codici quaſi ad verbum reſpondeat. Addidimus Corollaria, ne Lectores in illis proprio marte eruendis cruciarentur. Præterea quam in correctione adhibuimus diligentiam, vobis cognoſcendum relinquimus, ne longa oratione id probare conemur, quod res ipſa demõſtrat. Verum ſi hæc curioſis placuerint, breui eàdem forma reliquos elementorum libellos imprimi curabimus. Valete,


LINEA RECTA
SVPERFICIES RECTA
CVRVA
CVRVA
CVRVI LINEVS
MIXTVS
RECTILINEVS
OBTVSVS
ACVTVS
RECTVS
SEMI CIRCVLVS
DIAMETER
CIRCVLVS
AMBLIGONIVM
ISOSCELES
SCALENVM
RECTANGVLVM
EQVILATERVM
RHOMBOIDES
QVADRATVM
OXYGONIVM
RHOMBVS
COM PLEMEN
CIRCA DIAMETRV
PARALLELOGRAMMVM
LINEÆ PARALL

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER PRIMUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

1. Punctum eſt, cujus nulla eſt pars, vel quod magnitudinem nullam habet.
2. Linea verò eſt longitudo latitudinis expers.
3. Lineæ fines ſunt puncta.
4. Recta linea eſt, quæ ex æquali ſuis interjjcitur punctis.
5. Superficies eſt id, quod longitudinem, & latitudinem tantum habet.
6. Superficiei fines ſunt lineæ.
7. Plana ſuperficies eſt, quæ ex æquali ſuis interjjcitur lineis.
8. Planus angulus eſt, duabus lineis in plano ſe ſe contingentibus, & non in directum jacentibus, alterius ad alteram inclinatio.
9. Quando autem quæ angulum continent rectæ li-

Digitized by Google

neæ fuerint, rectilineus angulus appellatur.
10. Cum verò recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum: & quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis vocatur ad eam, cui inſiſtit.
11. Obtuſus angulus eſt, qui major eſt recto.
12. Acutus autem, qui recto eſt minor.
13. Terminus eſt, qui alicujus eſt finis.
14. Figura eſt, quæ aliquo, vel aliquibus terminis continetur.
15. Circulus eſt figura plana una linea cõtenta, quæ circumferentia appellatur, ad quam, ab uno puncto intra figuram exiſtente, omnes rectę lineæ pertinentes ſunt æquales.
16. Hoc autem punctum centrum circuli nuncupatur.
17. Diameter circuli eſt recta quædam linea per cẽtrum ducta, & ex utraque parte à circumferentia circuli terminata, quæ quidem & bifariam circulum ſecat.
18. Semicirculus eſt figura, quæ continetur diametro, & ea, quæ ex ipſa circuli circumferentia intercipitur.
19. Portio circuli eſt figura, quæ, recta linea, & circuli circumferentia continetur.
20. Rectilineæ figuræ ſunt, quæ rectis continentur lineis.
21. Trilateræ quidem, quæ tribus.
22. Quadrilateræ, quæ quatuor.

23. Mul-

Digitized by Google

23. Multilateræ verò, quæ pluribus, quam quatuor rectis lineis comprehenduntur.

24. Trilaterarum figurarum æquilaterum eſt triangulum, quod tria latera habet æqualia.

25. Iſoſceles, ſive æquicrure, quod duo tantum æqualia latera habet.

26. Scalenum verò eſt, quod tria inæqualia habet latera.

27. Ad hæc, trilaterarum figurarum, rectangulum quidem eſt triangulum, quod rectum angulum habet.

28 Obtuſangulum eſt, quod obtuſum habet angulum.

29. Acutangulum verò, quod tres acutos angulos habet.

30. Quadrilaterarum figurarũ quadratum eſt, quod & æquilaterum eſt, & rectangulum.

31. Altera parte longior figura eſt, quæ rectangula quidem, æquilatera verò non eſt.

32. Rhombus, quæ æquilatera quidem, ſed rectangula non eſt.

33. Rhomboides, quæ, & oppoſita latera, & oppoſitos angulos inter ſe æquales habet, neque æquilatera eſt, neque rectangula.

34. Præter has autem reliquæ quadrilateræ figuræ Trapezia vocentur.

35. Parallelæ, ſeu æquidiſtantes rectæ lineæ ſunt, quæ cum in eodem ſint plano, & ex utraque parte in infinitum producantur, in neutram partem inter ſe conveniunt.

Poſtulata.

1. POſtuletur à quovis puncto ad quodvis punctũ rectam lineam ducere.
2. Rectam lineam terminatam in continuum, & directum producere.
3. Quovis centro,& intervallo circulum deſcribere.
4. Omnes angulos rectos inter ſe æquales eſſe.
5. Et ſi in duas rectas lineas recta linea incidens,interiores, & ex eadem parte angulos,duobus rectis minores fecerit, rectas lineas illas in infinitum productas inter ſe convenire ex ea parte, in qua ſunt anguli duobus rectis minores.

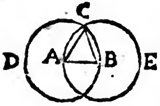
Axiomata, ſeu Communes notiones.

1. Quæ eidem æqualia, & inter ſe ſunt æqualia.
2. Et ſi æqualibus æqualia adijciantur tota sũt æqualia.
3. Et ſi ab æqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt æqualia.
4. Et ſi inæqualibus æqualia adijciantur, tota ſunt inæqualia.
5. Et ſi ab inæqualibus æqualia auferantur, reliqua ſunt inæqualia.
6. Et quæ ejuſdem dupla, inter ſe ſunt æqualia.
7. Et quæ ejuſdem dimidia, inter ſe ſunt æqualia.
8. Et quæ ſibi ipſis congruunt,inter ſe ſunt æqualia.
9. Totum eſt ſua parte majus.
10. Duæ rectæ lineæ ſpatium non comprehendunt.

PRO-

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

In data recta linea terminata, triangulum æquilaterum conſtituere.



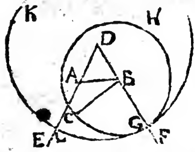
Sit data recta linea terminata AB. oportet in ipſa AB triangulum æquilaterum conſtituere. Centro quidem A intervallo autem A B circulus deſcribatur BCD. Et rurſus centro B, intervalloq; BA deſcribatur circulus ACE, & à puncto C, in quo circuli ſe invicem ſecant, ad AB ducantur rectæ lineæ CA, CB. Quoniam igitur A centrum eſt circuli C B D, erit A C ipſi AB æqualis; (1) rurſus quoniam B circuli CAE eſt centrum, erit BC æqualis BA. oſtenſa eſt autem & CA æqualis AB. utraque igitur ipſarum CA, CB ipſi A B eſt æqualis. Quæ autem eidem ſunt æqualia, & inter ſe æqualia sũt. (2) Ergo CA ipſi CB eſt æqualis, tres igitur CA, AB, BC inter ſe ſunt æquales; ac propterea triangulum æquilaterum eſt ABC, & conſtitutum eſt in data recta linea terminata AB, quod feciſſe oportebat.

---

(1) diff. 15. (2) Com. not. 1.

PROBLEMA II. PROPOSITIO II.

Ad datum punctum datæ rectæ lineæ æqualem rectam lineam ponere.

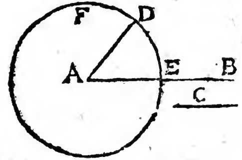


Sit datum quidem punctum A, data verò recta linea B C. oportet ad A punctum ipſi B C rectæ lineæ æqualem rectam lineā ponere. Ducatur à pūcto A ad B recta linea A B:(1) & in ipſa conſtituatur triangulum æquilaterum D A B,(2) producanturque in directū ipſis D A D B rectæ lineæ A E B F.(3) & centro quidem B, intervallo autē B C circulus C G H deſcribatur. Rurſuſque centro D, & intervallo D G deſcribatur circulus G K L. Quoniam igitur punctum B centrum eſt C G H circuli, erit B C ipſi B G æqualis.(4) Et rurſus quoniam D centrum eſt circuli G K L, erit D L æqualis D G: quarum D A eſt æqualis D B. reliqua igitur A L reliquæ G B eſt æqualis. (5) Oſtenſa autem eſt B C æqualis B G. Quare utraq; ipſarum A L B C eſt æqualis ipſi B G. Quæ autem eidē æqualia ſunt, & inter ſe ſunt æqualia (6) Ergo & A L eſt æqualis B C. Ad datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ B C æqualis poſita eſt A L. Quod facere oportebat.

Pro-

(1) Poſtul. 1. (2) Prima hujus. (3) Poſtul. 2. (4) Diffin. 15. (5) Com. no. 3. (6) Com. no. 1.

Problema 1. Propoſitio 3. Duabus datis rectis lineis inæqualibus à majori minori æqualem abſcindere.



Sint datæ duæ rectæ lineæ inæquales AB, C; quarũ major ſit AB. oportet à majori AB minori C æqualem rectam lineam abſcindere. Ponatur ad A punctũ ipſi C æqualis recta linea AD, (1) & centro quidẽ A, intervallo autẽ AD circulus deſcribatur DEF. (2) Et quoniam A centrum eſt DEF circuli, erit AE ipſi AD æqualis. Sed & C æqualis AD. utraq; igitur ipſarũ A E, C ipſi AD æqualis erit. (3) Quare & AE ipſi C eſt æqualis. Duab. igitur datis rectis lineis inæqualibus AB, C, à majori AB minori C æqualis abſciſſa eſt AE. Quod feciſſe oportebat.

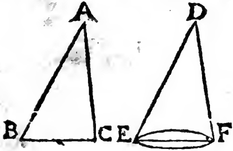
---

(1) Ex antecedente. (2) poſt. 3. (3) Com. no. 1.

Theorema 1. Propoſitio 4. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt, & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera

A B, A C duobus lateribus D E, D F ęqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem A B lateri D E æquale, latus verò A C ipſi D F; & angulum B A C angulo E D F æqualem. Dico, & baſim B C baſi E F æqualem

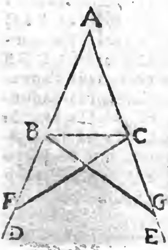


eſſe, & triangulum A B C æquale triangulo D E F, & reliquos angulos reliquis angulis æquales, alterum alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur; nempè angulum A B C angulo D E F: & angulum A C B angulo D F E. triangulo enim A B C congruente ipſi D E F, & puncto quidem A poſito in D, recta verò linea A B in ipſa D E: & punctum B puncto E cõgruet; quod A B ipſi D E ſit æqualis. Congruente autem A B ipſi D E; congruet, & A C recta linea, rectæ lineæ D F cum angulus B A C ſit æqualis angulo E D F. Quare, & C congruet ipſi F: eſt enim rurſus recta linea A C æqualis rectæ D F. Sed, & punctum B congruebat puncto E. Ergo, & baſis B C baſi E F congruet. Nam ſi puncto quidem B congruente ipſi E, C verò ipſi F; baſis B C baſi E F non congruit; duæ rectæ lineæ ſpatium comprehendent: quod fieri non poteſt. (1) Congruet igitur B C baſis, baſi E F, & ipſi æqualis erit. Quare, & totum A B C triangulum congruet toti triangulo D E F, & ipſi erit æquale; & reliqui

(1) Com.no.10.

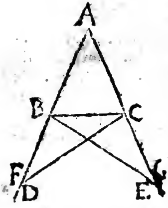
liqui anguli reliquis angulis congruent, & ipſis æquales erũt. Videlicet angulus A B C angulo D E F, & angulus A C B angulo D F E. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, habeant autem, & angulum angulo æqualem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi æqualem habebunt; & triangulum triangulo æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur: quod oſtendere oportebat.

Theorema 2. Propoſitio 5. Æquicrurium triangulorum, qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt.



Sit æquicrure triangulum A B C; habens A B latus, lateri A C æquale, & producantur in directum ipſis A B, A C rectæ lineæ B D, C E. Dico angulum quidem A B C angulo A C B, angulum verò C B D angulo B C E æqualem eſſe. Sumatur enim in linea B D, quodvis punctum F: atque à majori A E minori A F æqualis auferatur A G: (1) junganturque F C, G B. Quoniam igi-

(1) tert. Hujus.

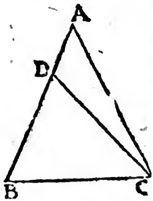


igitur A F quidem eſt æqualis A G; A B verò ipſi A C; duæ F A A C, duabus G A A B æquales ſunt, altera alteri; & angulum F A G communem continẽt. Baſis igitur F C baſi G B eſt æqualis; & triangulum A F C æquale triangulo A G B; & reliqui anguli, reliquis angulis æquales erunt, alter alteri; quibus ęqualia latera ſubtenduntur (2) Videlicet angulus quidem A C F æqualis angulo A B G; angulus verò A F C; angulo A G B. Et quoniam tota A F, toti A G eſt æqualis; quarum A B eſt æqualis A C; erit & reliqua B F reliquæ C G æqualis. (3) Oſtenſa eſt autem F C æqualis G B; duæ igitur B F, F C duabus C G G B æquales ſunt, altera alteri; & angulus B F C æqualis angulo C G B: eſtque baſis ipſorum BC communis; ergo & triangulum B F C triangulo C G B æquale erit; & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri; quibus æqualia latera ſubtenduntur. (4) Angulus igitur F B C eſt æqualis angulo G C B; & angulus B C F angulo C B G. Itaque quoniam totus A B G angulus toti angulo A C F æqualis oſtenſus eſt, quorum angulus C B G eſt æqualis ipſi B C F: erit reliquus A B C reliquo A C B ęqualis: (5) & ſunt

(2) Ex præcedente. (3) Axioma.3. (4) Ex præcedente. (5) Axioma.3.

& ſunt ad baſim A B C trianguli: oſtenſus autem eſt, & F B C angulus æqualis angulo G C B, qui ſunt ſub baſi. Æquicruiium igitur triangulorum, qui ad baſim anguli inter ſe ſunt æquales, & productis æqualibus rectis lineis, anguli, qui ſunt ſub baſi, inter ſe æquales erunt. Quod oſtendiſſe oportebat.

Theorema 3. Propoſitio 6. Si trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt.

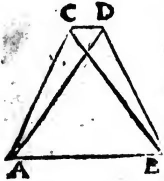


SIt triangulum ABC, habens angulum ABC angulo ACB æqualem. Dico & AB latus lateri AC æquale eſſe; ſi enim inæqualis eſt AB ipſi AC; altera ipſarum eſt major. Sit major AB; atquè à majori AB, minori AC æqualis auferatur DB; (1) & DC jungatur. Quoniam igitur DB eſt æqualis ipſi AC; communis autem BC: erunt duæ DB BC duabus AC CB æquales, altera alteri; & angulus DBC æqualis angulo ACB. Baſis igitur DC baſi AB eſt æqualis, & triangulum DBC æquale triangulo ACB (2) minus majori; quod eſt abſurdum. Non igitur inæqualis eſt AB ipſi AC. Ergo æqualis erit. Si igitur trianguli duo anguli inter ſe ſint æquales, & æquales angulos ſubtendentia latera inter ſe æqualia erunt: quod demonſtraſſe oportuit.

Theo-

(1) tert. hujus. (2) quart. hujus.

Theorema 4. Propoſitio 7. In eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, non conſtituentur ad aliud, atque aliud punctũ, ad eaſdem partes, eoſdem, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes.



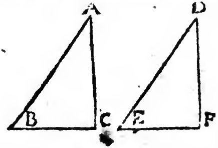
SI enim fieri poteſt, in eadem recta linea A B duabus eiſdem rectis lineis A C, C B aliæ duæ rectæ lineæ A D D B æquales, altera alteri conſtituantur ad aliud, atque aliud punctum C, D, ad eaſdem partes, ut ad C, D, eoſdem habentes terminos A, B, quos primę rectæ lineæ, ita vt C A quidem ſit æqualis D A, eundem, quem ipſa terminum, habens A; C B verò ſit æqualis D B, eundem habens B terminum; & C D jungatur. Itaque quoniam A C eſt æqualis A D; erit, & angulus A C D angulo A D C æqualis. (1) Major igitur eſt A D C angulus angulo D C B. Quare angulus C D B angulo D C B multo major erit. Rurſus quoniam C B eſt ęqualis D B, & angulus C D B ęqualis erit angulo D C B: oſtenſus autem eſt ipſo multo major; quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea duabus eiſdem rectis lineis aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri conſtituentur ad aliud,

(1) quint. hujus.

aliud, atque aliud punctum, ad eaſdem partes, eoſdē, quos primæ rectæ lineæ, terminos habentes; quod oſtendiſſe oportebat.

Theorema 5. Propoſitio 8. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & baſim baſi æqualem: angulum quoque, qui æqualibus lateribus continetur, angulo æqualem habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ duo latera A B, A C duobus lateribus D E D F æqualia habeant, alterum alteri; vt ſit A B quidem æquale D E; A C verò ipſi D F: habeant autem, & baſim B C baſi EF æqualem. Dico angulū quoque BAC angulo EDF æqualem eſſe. Triangulo enim ABC congruente ipſi



DEF triangulo, & pūcto quidem B poſito in E; recta verò linea BC in EF: congruet, & C punctum puncto F, quoniam B C ipſi E F eſt æqualis. Itaque cōgruente BC ipſi EF; congruent & BA AC ipſis ED DF. ſi enim baſis quidem BC baſi EF congruit; latera autem BA AC lateribus ED DF non congruunt, ſed permutantur; ut EG, GF: conſtituentur in eadem recta linea, duabus eiſdem rectis lineis, aliæ duæ rectæ lineæ æquales, altera alteri, ad aliud, atque aliud punctum, ad eaſdē

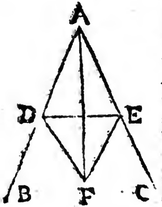
par-



partes, eoſdem habentes terminos: non conſtituuntur autem, vt demonſtratum eſt;(1) non igitur, ſi baſis BC congruit baſi EF, non congruent, & BA AC latera lateribus ED DF. congruent igitur. Quare & angulus BAC angulo EDF congruet, & ipſi erit æqualis. Si igitur duo triangula, duo latera, duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri; habeant autem, & baſim baſi æqualẽ: angulum quoque æqualibus lateribus contentum angulo æqualem habebunt: quod demonſtrare oportebat.

(1) In antecedente.

Problema 4. Propoſitio 9. Datum angulum rectilineum biſariam ſecare.



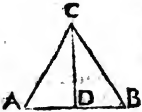
Sit datus angulus rectilineus BAC itaque oportet ipſum biſariam ſecare. Sumatur in linea AB quodvis punctum D; & à linea AC, ipſi AD æqualis auferatur AE; (1) junctaque DE, cõſtituatur in ea triangulum æquilaterum DEF; (2) & AF jungatur. Dico angulum BAC à recta linea AF biſariam ſecari. Quoniam enim AD eſt æqualis AE; com-

(1) tert. hujus. (2) pr. hujus.

communis autem AF: duæ DA AF duabus EA AF æquales ſunt, altera alteri; & baſis DF æqualis baſi EF, angulus igitur DAF angulo EAF eſt æqualis. (3) quare datus angulus rectilineus BAC à recta linea AF bifariam ſectus eſt: quod facere oportebat.

(3) Ex antecedente.

Problema 5. Propoſitio 10. Datam rectam lineam terminatam bifariam ſecare.



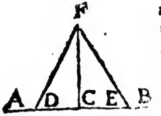
Sit data recta linea terminata AB, oportet ipſam bifariam ſecare. conſtituatur in ea triangulum æquilaterum ABC; (1) & ſecetur ACB angulus bifariam recta linea CD. (2) dico AB rectam lineam in puncto D bifariam ſecari. Quoniam enim AC eſt æqualis CB; communis autem CD; duæ AC CD duabus BC CD æquales ſunt; altera alteri: & angulus ACD æqualis angulo BCD baſis igitur AD baſi BD eſt æqualis. (3) Et ob id recta linea terminata AB bifariam ſecta eſt in puncto D: quod facere oportebat.

Problema 6. Propoſitio 11. Data recta linea à puncto in ipſa dato ad rectos angulos rectam lineam ducere.

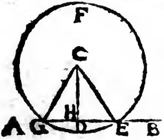
Sit data recta linea AB, & datum in ipſa punctum C, oportet à puncto C ipſi AB ad rectos angulos re-

(1) pri. hujus. (2) Ex antecedente. (3) quart. hujus.

rectam lineam ducere. Sumatur in AC quodvis punctum D: ipſique CD æqualis ponatur CE, (1) & in DE conſtituatur triangulum æquilaterum FDE; (2) & FC jungatur. Dico datæ rectę lineæ AB à puncto C in ipſa dato, ad rectos angulos ductam eſſe FC. Quoniam enim DC eſt æqualis CE, & FC communis; erunt duæ DC CF duabus EC CF æquales, altera alteri; & baſis DF eſt æqualis baſi FE. angulus igitur DCF angulo ECF eſt æqualis, (3) & ſunt deinceps. Quando autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos æquales inter ſe fecerit: rectus eſt uterque æqualium angulorum, (4) ergo uterque ipſorum DCF, FCE eſt rectus. Datæ igitur rectæ lineæ AB à puncto in ipſa dato C ad rectos angulos ducta eſt FC recta linea. Quod feciſſe oportuit.



Problema 7. Propoſitio 12. Super datam rectam lineam infinitam, à dato puncto, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam ducere.



SIt data quidem recta linea infinita AB, datum verò punctum C, quod in ea non eſt Oportet ſuper datam rectam lineam infinitam AB, à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem rectam lineam du-

(1) ſec, hujus. (2) pr. (3) oct. hujus. (4) Diff. 10.

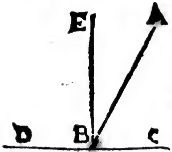
ducere. Sumatur enim ad alteras partes ipſius AB rectæ lineæ quodvis punctum D: & centro quidem C, intervallo autem CD, circulus deſcribatur EFG: (1) & EG in H bifariam ſecetur. (2) junganturque CG, CH, CE. Dico ſuper datam rectam lineam infinitam AB, à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularem CH ductam eſſe. Quoniam enim æqualis eſt GH ipſi HE, communis autem HC, duæ GH HC, duabus EH, HC æquales ſunt, altera alteri; & baſis CG eſt æqualis baſi CE. Angulus igitur CHG angulo EHC eſt æqualis, (3) & ſunt deinceps; cum autem recta linea ſuper rectam lineam inſiſtens, eos, qui deinceps ſunt, angulos, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum, & quæ inſiſtit recta linea, perpendicularis appellatur ad eam, cui inſiſtit, (4) ergo ſuper datam rectam lineam infinitam AB à dato puncto C, quod in ea non eſt, perpendicularis ducta eſt CH. Quod facere oportebat.

(1) Poſtul. 3. (2) 10. hujus (3) oct. hujus. (4) D ff. 10.

Theorema 6. Propoſitio 13. Cum recta linea ſuper rectam conſiſtens lineam angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet.

Recta enim linea quædam AB ſuper rectam CD conſiſtens angulos faciat CBA, ABD. Dico CBA ABD angulos, vel duos rectos eſſe, vel duobus rectis æquales, ſi enim CBA eſt æqualis ipſi ABD, duo recti

 ſunt,



ſunt; (1) ſin minus, ducatur à puncto B ipſi CD ad rectos angulos BE. anguli igitur CBE EBD ſunt duo recti, & quoniã CBE, duobus CBA ABE eſt æqualis, communis apponatur EBD. ergo anguli CBE EBD tribus angulis CBA ABE EBD ſunt æquales. Rurſus quoniã DBA angulus eſt æqualis duobus DBE, EBA, communis apponatur ABC. anguli igitur DBA ABC tribus DBE EBA ABC æquales ſunt. At oſtensũ eſt angulos quoque CBE, EBD eiſdẽ tribus æquales eſſe: quæ verò eidẽ ſunt æqualia, & inter ſe æqualia ſunt, (2) ergo, & anguli CBE, EBD ipſis DBA ABC ſunt æquales, ſuntque CBE EBD duo recti anguli; igitur DBA, ABC duobus rectis æquales erunt, ergo cum recta linea ſuper rectam lineam conſiſtens angulos fecerit, vel duos rectos, vel duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonſtrare.

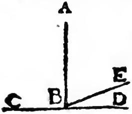
---

(1) Diffin. 10. (2) Axioma. 1.

Theorema 7. Propoſitio 14. Si ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes poſitæ, angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales fecerint; ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt.

AD aliquam enim rectam lineam AB, atque ad punctum in ea B, duæ rectæ lineæ BC, BD non ad

ad eaſdem partes poſitæ, angulos, qui deinceps ſunt, ABC ABD duobus rectis æquales faciant. Dico BD ipſi CB in directum eſſe. Si enim BD non eſt in directum ipſi CB, ſit ipſi CB in directum BE. Quoniam igitur recta linea AB ſuper rectam CBE conſiſtit, anguli ABC ABE duobus rectis ſunt æquales. (1) Sed & anguli ABC ABD ſunt æquales duobus rectis. Anguli igitur CBA ABE ipſis CBA ABD æquales erunt. Communis auferatur ABC. Ergo reliquus ABE reliquo ABD eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. Non igitur BE eſt in directum ipſi BC. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam eſſe, præter BD. Ergo CB ipſi BD in directum erit. Si igitur ad aliquam rectam lineam, atque ad punctum in ea, duæ rectæ lineæ non ad eaſdem partes poſitæ, angulos, qui deinceps ſunt, duobus rectis æquales fecerint, ipſæ rectæ lineæ in directum ſibi invicem erunt. Quod demonſtrare oportebat.

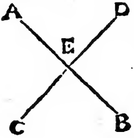


(1) Ex antecedente.

Theorema 8. Propoſitio 15. Si duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, inter ſe æquales efficient.

Duæ enim rectæ lineæ AB, CD ſe invicem ſecent in puncto E. Dico angulum quidem AEC angulo DEB, angulum verò CEB angulo AED æqualem

lem eſſe. Quoniam enim recta linea AE ſuper rectam CD conſiſtens angulos facit CEA AED; erunt



hi duobus rectis æquales. (1) Rurſus quoniam recta linea DE ſuper rectam AB conſiſtens facit angulos AED DEB, erunt AED DEB anguli æquales duobus rectis. Oſtenſum autem eſt angulos quoque CEA AED duobus rectis eſſe æquales. Anguli igitur CEA AED angulis AED DEB æquales ſunt. Communis auferatur AED. Ergo reliquus CEA reliquo BED eſt æqualis. (2) Simili ratione, & anguli CEB, DEA æquales oſtenduntur. Si igitur duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecuerint, angulos, qui ad verticem ſunt, æquales efficient. Quod oſtendere oportebat.

(1) 13. hujus. (2) 3. com. not.

COROLLARIUM.

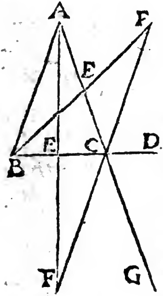
Ex hoc manifeſtè conſtat rectas lineas, quotquot ſe invicem ſecant, facere angulos ad ſectionem quatuor rectis æquales.

Theorema 9. Propoſitio 16. Omnis trianguli, uno latere producto, exterior angulus utroque interiore, & oppoſito eſt major.

SIt triangulum ABC, & unum ipſius latus BC ad D producatur. Dico exteriorem angulum ACD

utro-

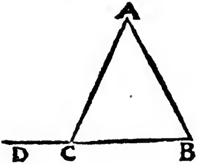
utroque interiore,& oppoſito,videlicet CBA,& BAC majorem eſſe; Secetur enim AC bifariam in E, (1) & juncta BE producatur ad F; ponaturq; ipſi BE æqualis EF. jungatur præterea FC,& ducta AC ad G producatur. Quoniam igitur AE quidem eſt æqualis EC, BE verò ipſi EF, duæ AE EB duabus CE EF æquales sũt, altera alteri: & angulus AEB angulo FEC eſt ęqualis,ad verticem enim ſunt. Baſis igitur AB æqualis eſt baſi FC;& ABE triangulum,triangulo FEC, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. (2) Ergo angulus BAC eſt æqualis angulo ECF. Sed ECD angulus major eſt ipſo ECF. Major igitur eſt angulus ACD angulo BAE. Similiter recta linea BC bifariam ſecta, oſtendetur etiam BCG angulus, hoc eſt ACD angulo ABC major. Omnis igitur trianguli,uno latere producto, exterior angulus utroque interiore, & oppoſito major eſt. Quod oportebat demonſtrare.



(1) 10.hujus. (2) 4.hujus.

Digitized by Google

Theorema 10. *Propoſitio* 17. *Omnis trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt, quomodocumque ſumpti.*



Sit triangulum ABC. Dico ipſius ABC triã-guli duos angulos quo-modocũque sũptos duo-bus rectis minores eſſe. Producatur enim BC ad D. Et quoniam trianguli ABC exterior angulus ACD major eſt interiore, & oppoſito ABC: (1) communis apponatur ACB. Anguli igitur AC D, ACB, angulis ABC BCA majores ſunt. Sed ACD ACB ſunt æquales duobus rectis. (2) Ergo ABC BCA duobus rectis ſunt minores. Similiter demonſtrabimus angulos quoque BAC ACB, itemque CAB ABC duobus rectis minores eſſe. Omnis igitur trianguli duo anguli duobus rectis minores ſunt, quomodocumque ſumpti; quod demonſtrare oportebat.

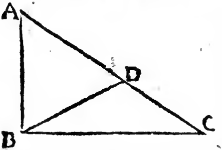
(1) 16.hujus. (2) 13. hujus.

Theorema 11. *Propoſitio* 18. *Omnis trianguli majus latus majorem angulum ſubtendit.*

Sit triangulum ABC habens latus AC latere AB majus. Dico, & ABC angulum angulo BCA majorem.

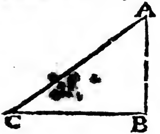
Digitized by Google

jorem eſſe. Quoniam enim AC majus eſt, quam AB, ponatur ipſi AB æqualis AD; & BD jungatur. Et quoniam trianguli BDC exterior angulus eſt ADB, erit is major interiore, & oppoſito DCB. (1) ſed ADB æqualis eſt ipſi ABD, quòd & latus AB lateri AD ſit æquale, (2) major igitur eſt & ABD angulus; angulo ACB. quare ABC ipſo ACB multo major erit. Omnis igitur trianguli majus latus majorem angulũ ſubtendit: quod oportebat demonſtrare.



(1) 16.hujus. (2) 5.hujus.

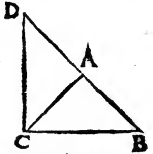
Theorema 12. Propoſitio 19. Omnis trianguli major angulus maus l atus ſubtendit.



SIt triangulũ ABC majorem habens ABC angulum angulo BCA. dico, & latus AC latere AB majus eſſe. Si enim ncn eſt majus, vel AC eſt æquale ipſi AB, vel ipſo minus. Æquale igitur non eſt, nam & angulus ABC angulo ACB æqualis eſſet; non eſt autem: non igitur AC ipſi AB eſt æquale. Sed neque minus, eſſet enim, &

angulus ABC angulo ACB minor: atqui non eſt. non igitur AC minus eſt ipſo AB oſtenſum autem eſt neque æquale eſſe. ergo AC ipſo AB eſt majus. omnis igitur trianguli major angulus majus latus ſubtendit, quod oportebat demonſtrare.

Theorema 11. Propoſitio 20. Omnis trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocumque ſumpta.

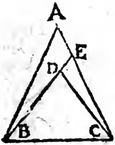


SIt enim triangulum ABC. dico ipſius ABC trianguli duo latera reliquo majora eſſe, quomodocunque ſumpta; videlicet latera quidem BA, AC majora latere BC; latera verò AB BC majora latere AC: & latera BC CA majora ipſo AB. producatur enim BA ad punctum D; ponaturque ipſi CA æqualis AD; & DC jungatur. Quoniam igitur DA eſt æqualis AC, erit & angulus ADC angulo ACD æqualis. (1) Sed BCD angulus major eſt angulo ACD. angulus igitur BCD angulo ADC eſt major; Et quoniam triangulum eſt DCB habens BCD angulum majorem angulo B[illegible]: majorem autem angulum majus latus ſubtendit: (2) erit latus DB latere BC majus; Sed DB eſt æquale ipſis BA AC, quare latera BA AC ipſo BC majora ſunt. Similiter oſtendemus, & latera quidem AB BC majora eſſe

(1) 5. hujus. (2) Ex antecedente.

ſe latere CA: latera verò BC CA ipſo AB majora. Omnis igitur trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocumque ſumpta; quod oſtendere oportebat.

Theorema 14. Propoſitio 21. Si à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt.



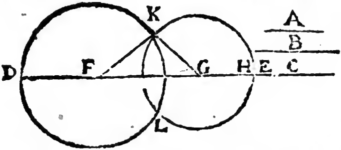
Trianguli enim ABC in vno latere BC à terminis B,C duæ rectæ lineæ intra cōſtituantur BD, DC. Dico BD, DC reliquis duobus trianguli lateribus BA, AC minores quidem eſſe, majorem verò continere angulum BDC angulo BAC. producatur enim BD ad E. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt maiora (1) erunt trianguli ABE duo latera BA AE majora latere BE. communis apponatur EC. ergo BA AC ipſis BE EC majora ſunt. Rurſus quoniam CED trianguli duo latera CE ED ſunt majora latere CD, communis apponatur DB. quare CE EB ipſis CD DB ſunt majora. Sed oſtenſum eſt BA AC majora eſſe BE EC. multo igitur BA AC ipſis BD DC majora ſunt. Rurſus quoniam omnis trianguli exterior angulus interiore & oppoſito eſt major: (2) erit trianguli CDE exterior

(1) Ex antecedente. (2) 16. hujus.

rior angulus BDC major ipſo CED. Eadem ratione, & trianguli ABE exterior angulus CEB ipſo BAC eſt major. Sed angulus BDC oſtenſus eſt major angulo CEB. multo igitur BDC angulus angulo BAC major erit. Quare ſi à terminis unius lateris trianguli duæ rectæ lineæ intra conſtituantur, hæ reliquis duobus trianguli lateribus minores quidem erunt, majorem verò angulum continebunt. quod demonſtrare oportebat.

Problema 8. *Propoſitio* 22. *Ex tribus rectis lineis, quæ tribus rectis lineis datis æquales ſint, triangulum conſtituere. oportet autem duas reliqua majores eſſe, quomodocumquè ſumptas; quoniam omnis trianguli duo latera reliquo majora ſunt, quomodocumquè ſumpta.*

Sint tres datæ rectæ lineæ A, B, C, quarum duę reliqua majores ſint, quomodocumque ſumptæ, ut ſcilicet A, B quidem ſint majores quam C; A, C verò majores quàm B; & præterea B, C majores quàm A. Itaque oportet ex rectis lineis æqualibus ipſis A, B, C



triangulum conſtituere. Exponatur aliqua recta linea DE, terminata quidem ad D, infinita verò ad E, & ponatur ipſi quidem A æqualis DF, ipſi vero B æqualis

Digitized by Google

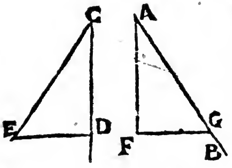
lis FG, & ipſi C æqualis GH: & centro F, intervallo autem FD circulus deſcribatur DKL (1) Rurſuſque centro G, & intervallo GH, alius circulus KLH deſcribatur, & jungantur KF, KG. Dico ex tribus rectis lineis æqualibus ipſis A,B,C triangulum KFG conſtitutum eſſe. Quoniam enim punctum F centrum eſt DKL circuli; erit FD æqualis FK, Sed FD eſt æqualis A. ergo, & FK ipſi A eſt æqualis. Rurſus quoniam punctum G centrum eſt circnli LKH, erit GH æqualis GK. Sed GH. eſt æqualis C. ergo, & GK ipſi C ęqualis erit; eſt autem & FG æqualis B tres igitur rectæ lineæ KF, FG, GK tribus A, B, C ęquales ſunt Quare ex tribus rectis lineis KF, FG, GK, quæ ſunt æquales tribus datis rectis lineis A, B, C, triangulum conſtitutum eſt KFG. quod facere oportebat.

---

(1) tert. poſtul.

Problema 9. Propoſitio 23. Ad datam rectam lineam, & ad datum in ea punctum, dato angulo rectilineo æqualem angulum rectilineum conſtituere.

Sit data quidem recta linea A B, datum verò in ipſa punctum A; & datus angulus rectilineus D C E. oportet igitur ad datam rectam lineam A B, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E, æqualem angulum rectilineum conſtituere. Sumantur in utraque ipſarum C D, C E quævis puncta D, E, jungaturque D E, & ex tribus rectis lineis, quæ æquales ſint tribus C D, D E, E C triangulum con-



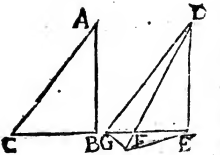
conſtituatur A F G, ex præcedenti ita ut C D ſit æqualis AF, & CE ipſi A G, & D E ipſi G F. Itaque quoniam duæ D C,C E duabus FA,AG æquales ſunt, altera alteri; & baſis D E eſt æqualis baſi F G: erit, & angulus D C E angulo F A G æqualis, (1) Ad datam igitur rectam lineam A B, & ad datum in ea punctum A, dato angulo rectilineo D C E æqualis angulus rectilineus conſtitutus eſt F A G, quod facere oportebat.

---

(1) oct. hujus.

Theorema 15. *Propoſitio* 24. *Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulũ autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur, & baſim baſi majorem habebunt.*

SInt duo triãgula ABC, DEF, quæ duo latera AB, AC duobus lateribus DE,DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus quidem AB æquale lateri DE,latus verò AC æquale DF:& angulus BAC angulo EDF ſit major. Dico, & baſim BC baſi EF majorem eſſe. Quoniam enim angulus BAC major eſt angulo EDF; conſtituatur ad rectam lineam DE, & ad pũctum in ea D, angulo BAC æqualis angulus EDG,



EDG, (1) ponaturque alterutri ipſarum AC DF æqualis DG, & GE, FG jungantur. Itaque quoniam AB quidem eſt æqualis DE, AC verò ipſi DG; duæ BA AC duabus ED DG æquales ſunt, altera alteri; & angulus BAC eſt æqualis angulo EDG. Ergo baſis BC baſi EG eſt æqualis. (2) Rurſus quoniam æqualis eſt DG ipſi DF; & angulus DFG angulo DGF: (3) erit DFG angulus angulo EGF major. Multo igitur major eſt EFG angulus ipſo EGF. Et quoniam triangulum eſt EFG, angulum EFG majorem habens angulo EGF; majori autem angulo majus latus ſubtenditur, (4) erit, & latus EG latere EF majus. Sed EG latus eſt æquale lateri BC. Ergo, & BC ipſo EF majus erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, angulum autem angulo majorem, qui æqualibus rectis lineis continetur: & baſim baſi majorem habebunt. Quod oportebat demonſtrare.

Theo-

---

(1) Ex antecedente (2) quart. hujus. (3) 5. hujus. (4) 19 hujus.

Theorema 16. Propoſitio 25. Si duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, baſim verò baſi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt.

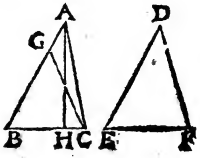


Sint duo triangula ABC DEF, quæ duo latera AB AC duobus lateribus DE DF æqualia habeant, alterum alteri, videlicet latus AB æquale lateri DE, & latus AC lateri DF: baſis autem BC baſi EF ſit major. Dico, & angulum BAC angulo EDF majorem eſſe. Si enim non eſt major, vel æqualis eſt, vel minor. Æqualis autem non eſt angulus BAC angulo EDF: eſſet enim, & baſis BC baſi EF æqualis. (1) Non eſt autem. Non igitur æqualis eſt BAC angulus angulo EDF. Sed neque minor. Minor enim eſſet, & baſis BC baſi EF. (2) Atqui non eſt. non igitur angulus BAC angulo EDF eſt minor. Oſtenſum autem eſt, neque eſſe æqualem. Ergo angulus BAC angulo EDF neceſſariò major erit. Si igitur duo triangula duo latera duobus lateribus æqualia habeant, alterum alteri, baſim verò baſi majorem; & angulum angulo, qui æqualibus lateribus continetur, majorem habebunt. Quod demonſtrare oportebat.

Theo-

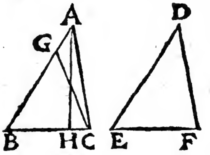
(1) quart. hujus. (2) Ex antecedente.

Theorema 17. Propoſitio 26. Si duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri, unumque latus uni lateri æquale, vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt.



SInt duo triangula ABC DEF, quæ duos angulos ABC BCA duobus angulis DEF EFD æquales habeant, alterũ alteri, videlicet angulũ quidem ABC æqualem angulo DEF; angulum verò BCA angulo EFD. Habeant autem, & unum latus uni lateri æquale, & primum quod æqualibus adjacet angulis; nempè latus BC lateri EF. Dico, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habere, alterum alteri, latus ſcilicet AB lateri DE; & latus AC ipſi DF, & reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF æqualem. Si enim inæqualis eſt AB ipſi DE, una ipſarum major eſt. Sit major AB, ponaturq; GB æqualis DE, & GC jungatur. Quoniam igitur BG quidem eſt æqualis DE, BC verò ipſi EF, duæ GB BC duabus DE EF æquales sũt, altera alteri: & angulus GBC æqualis angulo DEF. Baſis igitur GC baſi DF eſt æqualis: & GBC triangulum

lum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. (1) Ergo GCB angulus eſt æqualis angulo DFE. Sed angulus DFE angulo BCA æqualis ponitur. Quare, & BCG angulus angulo BCA eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. Non igitur



inæqualis eſt AB ipſi DE. Ergo æqualis erit. Eſt autem & BC æqualis EF. Itaque duæ AB BC duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis angulo DEF. Baſis igitur AC baſi DF, & reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt ęqualis. (2) Sed rurſus ſint latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur, æqualia, vt AB ipſi DE. Dico rurſus, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia eſſe; AC quidem ipſi DF, BC verò ipſi EF: & adhuc reliquum angulum BAC reliquo angulo EDF ęqualem. Si enim inæqualis eſt BC ipſi EF, una ipſarum major eſt. Sit major BC, ſi fieri poteſt; ponaturque BH æqualis EF, & AH jungatur. Quoniã igitur BH quidem eſt æqualis EF, AB verò ipſi DE; duæ AB BH duabus DE EF æquales ſunt, altera alteri, & angulos æquales continent. Ergo baſis AH baſi DF eſt ęqualis, & ABH triangulum triangulo DEF, & reliqui anguli reliquis angulis

1) quart. hujus. (2) quart. hujus.

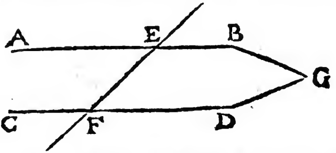
gulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur. (3) Æqualis igitur eſt angulus BHA angulo EFD Sed EFD eſt æqualis angulo BCA. Ergo,& BHA angulus angulo BCA eſt æqualis. Triãguli igitur AHC exterior angulus BHA æqualis eſt interiore, & oppoſito BCA , quod fieri non poteſt. Quare non inæqualis eſt BC ipſi EF. Æqualis igitur. Eſt autem, & AB æqualis DE. Duæ igitur AB,BC duabus DE,EF æquales ſunt,altera alteri, angulosq; æquales continent. Quare baſis AC æqualis eſt baſi DF, & ABC triangulum æquale triangulo DEF ,& reliquus angulus BAC reliquo angulo EDF eſt æqualis. Si igitur duo triangula duos angulos duobus angulis æquales habeant, alterum alteri,unumq; latus uni lateri æquale; vel quod æqualibus adjacet angulis, vel quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; & reliqua latera reliquis lateribus æqualia, alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem habebunt Quod oportebat demonſtrare.

(3) quart.hujus

Theorema 18. *Propoſitio* 27. *Si in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ erunt rectæ lineæ.*

IN duas enim rectas lineas AB,CD , recta linea EF incidens alternos angulos AEF ,EFD æquales inter ſe faciat. Dico rectam lineam AB ipſi CD parallelam eſse . Si enim non eſt parallela , productæ AB,CD, vel ad partes B,D conuenient, vel ad partes A,C. producantur, conveniantque ad partes B,D in puncto G. Itaque GEF trianguli exterior angulus

AEF major eſt interiore,& oppoſito EFG (1) Sed & æqualis, quod fieri non poteſt: non igitur AB, CD

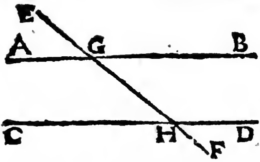


productę ad partes B,D convenient. Similiter demonſtrabitur neq; convenire ad partes A,C. quæ vero in neutras partes conveniunt, parallelæ inter ſe ſunt. (2) Parallela igitur eſt AB ipſi CD. Quare ſi in duas rectas lineas recta linea incidens alternos angulos inter ſe æquales fecerit, parallelæ inter ſe erunt, rectæ lineæ, quod oſtendere oportebat.

(1) 16. *hujus.* (2) *Diff.* 35.

Theorema 19, *Propoſitio* 28. *Si in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallela erunt inter ſe recta lineæ.*

IN duas enim rectas lineas A B, C D recta linea EF incidens exteriorem angulū EGB interiori, & oppoſito G H D æqualem faciat; vel interiores, & ad eaſdem partes BGH, GHD, duobus rectis æquales. Dico rectam lineam AB rectæ CD parallelam eſſe. Quoniam.n. EGB angulus æqualis eſt angulo GHD;



GHD, angulus autẽ EGB angulo AGH. (1) erit, & angulus AGH angulo GHD æqualis, & ſunt alterni. Parallela igitur eſt AB ipſi CD. (2) Rurſus quoniã anguli BGH, GHD duobus rectis ſunt æquales, & ſunt AGH BGH æquales duobus rectis (3) erunt anguli AGH, BGH angulis BGH GHD æquales. Communis auferatur BGH. Reliquus igitur AGH eſt æqualis reliquo GHD: & ſunt alterni. Ergo AB ipſi CD parallela erit. Si igitur in duas rectas lineas recta linea incidens exteriorem angulum interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem fecerit, vel interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales; parallelæ erunt inter ſe rectæ lineæ. Quod demonſtrare oportebat.

---

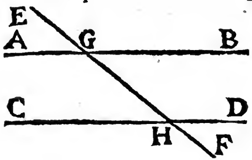
(1) 15. hujus. (2) Ex antecedente (3) 13. hujus.

Theorema 20. Propoſitio 29. In parallelas rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter ſe æquales, & exteriorem interiori, & oppoſito, & ad eaſdem partes æqualem, & interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet.

IN parallelas enim rectas lineas AB, CD recta linea incidat EF. Dico alternos angulos AGH, GHD inter ſe æquales efficere, & exteriorem EGB interiori, & ad eaſdem partes GHD æqualem:

Digitized by Google

& interiores, & ad eaſdem partes BGH, GHD duobus rectis æquales. Si enim inæqualis eſt AGH ipſi

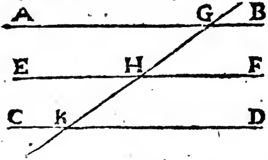


GHD, unus ipſorum major eſt. Sit major AGH. Et quoniam AGH angulus major eſt angulo GHD; cõmunis apponatur BGH. Anguli igitur AGH, BGH angulis BGH, GHD majores ſunt. Sed anguli AGH BGH ſunt æquales duobus rectis. (1) Ergo BGH, GHD anguli ſunt duobus rectis minores. Quæ vero à minoribus, quam ſint duo recti, in infinitum producuntur rectæ lineæ inter ſe conveniunt (2) Ergo rectæ lineæ AB, CD in infinitum productæ conveniunt inter ſe. Atqui non conveniunt, cum parallelæ ponantur. Non igitur inæqualis eſt AGH angulus angulo GHD. Quare neceſſario eſt æqualis. Angulus autem AGH æqualis eſt angulo EGB (3) Ergo, & EGB ipſi GHD æqualis erit. Communis apponatur BGH. Anguli igitur EGB, BGH ſunt æquales angulis BGH, GHD. Sed EGB, BGH æquales ſunt duobus rectis. Ergo, & BGH, GHD duobus rectis æquales erunt. In parallelas igitur rectas lineas recta linea incidens, & alternos angulos inter ſe æquales, & exteriorem interiori, & oppoſito, & ad eaſdem par-

(1) 13. hujus. (2) poſt 5. (3) 15. hujus.

partes æqualem, & interiores, & ad eaſdem partes duobus rectis æquales efficiet. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 21. Propoſitio 30. Quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ erunt.

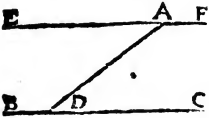


SIt utraque ipſarum AB, CD ipſi EF parallela. Dico, & AB ipſi CD parallelam eſſe. Incidat enim in ipſas recta linea GK. & quoniam in parallelas rectas lineas AB, EF, recta linea GK incidit, angulus AGH angulo GHF eſt æqualis. Rurſus quoniam in parallelas rectas lineas EF, CD, recta linea incidit GK, æqualis eſt GHF angulus angulo GKD. oſtenſus autem eſt, & angulus AGK angulo GHF æqualis; ergo, & AGK ipſi GKD æqualis erit, & ſunt alterni. Parallela igitur eſt AB ipſi CD. Ergo quæ eidem rectæ lineæ ſunt parallelæ, & inter ſe parallelæ erunt, quod oportebat demonſtrare.

Problema 10. Propoſitio 31. Per datum punctum datæ rectæ lineæ parallelam rectam lineam ducere.

SIt datum quidem punctum A, data vero recta linea BC. Oportet per A punctum ipſi BC rectæ li-

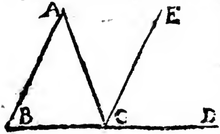
lineæ parallelam rectam lineam ducere. Sumatur in BC, quodvis punctum D, & jungatur AD: conſtituaturq; ad rectam lineam DA, & ad punctum in ipſa A, angulo ADC æqualis angulus DAE. (1) & in directum ipſi EA recta linea AF producatur.



Quoniã igitur in duas rectas lineas BC, EF recta linea AD incidens alternos angulos EAD, ADC inter ſe æquales efficit, EF ipſi BC parallela erit (2) Per datum igitur punctum A datæ rectæ lineæ BC parallela ducta eſt recta linea EAF. quod facere oportebat.

(1) 23. hujus. (2) 27. hujus.

Theorema 22. Propoſitio 32. Omnis trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis, & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt.



Sit triangulum ABC: & unum ipſius latus BC in D producatur. Dico angulum exteriorem ACD duobus interioribus, & oppoſitis CAB ABC, æqualem eſſe; & trianguli tres in-

interiores angulos ABC BCA CAB duobus rectis eſſe æquales. Ducatur.n. per punctum C ipſi AB rectæ lineæ, parallela CE. (1) Et quoniam AB ipſi CE parallela eſt, & in ipſas incidit AC, alterni anguli BAC, ACE inter ſe æquales ſunt. (2) Rurſus quoniam AB parallela eſt CE, & in ipſas incidit recta linea BD, exterior angulus ECD interiori, & oppoſito ABC eſt æqualis. (3) Oſtenſus autem eſt angulus ACE æqualis angulo BAC. Quare totus ACD exterior angulus æqualis eſt duobus interioribus, & oppoſitis BAC, ABC. communis apponatur ACB. anguli igitur ACD, ACB tribus ABC, BCA, CAB æquales ſunt. Sed anguli ACD, ACB ſunt æquales duobus rectis. (4) Ergo & ACB, CBA, CAB duobus rectis æquales erunt. Omnis igitur trianguli uno latere producto exterior angulus duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis; & trianguli tres interiores anguli duobus rectis æquales ſunt. Quod demonſtrare oportebat.

(1) Ex antecedente. (2) 29. hujus. (3) 29. hujus (4) 13. hujus.

Theorema 23. Propoſitio 33. Quæ æquales, & parallelas ad eaſdē partes conjungunt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt.

Sint æquales, & parallelæ AB, CD: & ipſas conjungant ad eaſdem partes rectæ lineæ AC, BD. Dico AC BD æquales, & parallelas eſſe. Iunga-

tur enim BC. Et quoniam AB parallela eſt CD, in ipſaſq; incidit BC, alterni anguli ABC, BCD æquales ſunt. (1) Rurſus quoniã AB eſt æqualis CD, communis autem BC, duæ AB, BC duabus BC, CD ſunt æquales; & angulus ABC æqualis angulo BCD. Baſis igitur AC baſi BD eſt æqualis: triangulũq; ABC triãgulo BCD: & reliqui anguli reliquis angulis æquales erunt, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur (2) Ergo angulus ACB angulo CBD eſt æqualis. Et quoniam in duas rectas lineas AC, BD recta linea BC incidens, alternos angulos ACB, CBD æquales inter ſe efficit, parallela eſt AC ipſi BD. (3) Oſtenſa autem eſt, & ipſi æqualis. Quæ igitur æquales; & parallelas ad eaſdem partes conjungunt rectæ lineæ, & ipſæ æquales, & parallelæ ſunt. Quod oportebat demonſtrare.



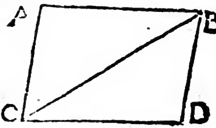
(1) 29. hujus. (2) 4. hujus. (3) 27. hujus.

Theorema 24. Propoſitio 34. Parallelogrammorum ſpatiorum latera, quæ ex oppoſito, & anguli, inter ſe æqualia ſunt; & diameter ea bifariam ſecat.

Sit parallelogrammum ACDB, cujus diameter B C. Dico AC, DB parallelogrammi latera, quæ

ex

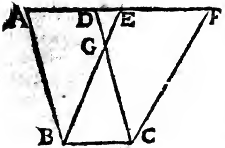
ex oppoſito, & angulos inter ſe æqualia eſſe.; & diametrum BC ipſum bifariam ſecare. Quoniam. .n. parallela eſt AB ipſi CD, & in ipſas incidit recta linea BC; anguli alterni ABC, BCD inter ſe æquales ſunt. Rurſus quoniam AC ipſi BD parallela eſt, & in ipſas incidit BC; alterni anguli ACB, CBD æquales ſunt inter ſe. Duo igitur triangula ſunt ABC, CBD, quæ duos angulos ABC, BCA duobus angulis BCD, CBD æquales habent, alterum alteri: & unum latus uni lateri æquale, quod eſt ad æquales angulos, utriq; commune BC. Ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt alterum alteri, & reliquum angulum reliquo angulo æqualem. æquale igitur eſt latus quidem AB lateri CD: latus vero AC ipſi BD. & angulus BAC angulo BDC æqualis, Et quoniam angulus ABC eſt æqualis angulo BCD; & angulus CBD angulo ACB, erit totus angulus ABD æqualis toti ACD. Oſtenſus autem eſt, & angulus BAC angulo BDC æqualis. Parallelogrammorum igitur ſpatiorũ latera, quæ ex oppoſito, & anguli, inter ſe æqualia ſunt. Dico etiam diametrum ea bifariam ſecare. Quoniam.n. æqualis eſt AB ipſi CD, communis autem BC, duæ AB, BC duabus DC, CB æquales ſunt, altera alteri, & angulus ABC æqualis eſt angulo BC D. Baſis igitur AC baſi DB æqualis. Quare, & triã-



gu-

gulum *ABC* triangulo *BCD* æquale erit. Ergo diameter *BC* parallelogrãmum ACD*B* bifariam ſecat. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 25. Propoſitio 35. Parallelogramma in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe æqualia ſunt.



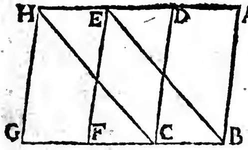
Sint parallelogramma ABCD, EBCF in eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AF,BC cōſtituta. Dico ABCD parallelogrammũ parallelogrammo EBCF æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammũ eſt ABCD, æqualis eſt AD ipſi BC. Eadem quoque ratione, & EF eſt æqualis BC; quare & AD ipſi EF æqualis erit: & communis DE; tota igitur AE toti DF eſt æqualis, eſt autem, & AB æqualis DC. Ergo duæ EA, A*B* duabus FD, DC æquales ſunt, altera alteri, & angulus FDC æqualis angulo EAB, exterior interiori; baſis igitur EB baſi FC eſt æqualis, & EAB triangulum æquale triangulo FDC (1) cōe auſeratur DGE. Reliquum igitur trapezium ABGD reliquo trapezio EG CF eſt æquale. Commune apponatur GBC triangulum. Ergo totum parallelogrammum

(1) 4. hujus.

Digitized by Google

mum ABCD toti parallelogrammo EBCF æquale erit. Parallelogrãma igitur in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 26. Propoſitio 36. Parallelogramma in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.

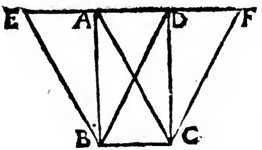


Sint parallelogrãma ABCD, EFGH in æqualibus baſibus BC, FG, & in eiſdem parallelis AH, BG conſtituta. dico parallelogrãmum ABCD parallelogrammo EFGH æquale eſſe. Conjungantur enim BE, CH: & quoniã æqualis eſt BC ipſi FG, & ipſi EH; erit & BC ipſi EH æqualis; ſuntq; parallelæ, & ipſas conjungunt BE, CH. Quæ autem æquales, & parallelas ad eaſdem partes conjungunt, æquales, & parallelæ ſunt (1) ergo EB, CH & æquales ſunt, & parallelæ: quare EBCH parallelogrammum eſt, & æquale parallelogrammo ABCD; baſim enim eandem habet BC, & in eiſdem parallelis BC, AD conſtituitur (2) Simili ratione, & EFGH parallelogram-

(1) 33. hujus. (2) Ex antecedente.

grammum eidem parallelogrammo EBCH eſt æquale. Ergo parallelogrammum ABCD parallelogrammo EFGH æquale erit. Parallelogramma igitur in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 27. Propoſitio 37. Triangula in eadem baſi, & in eiſdem parallelis conſtituta inter ſe æqualia ſunt.



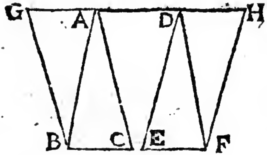
Sint triangula ABC, DBC in eadem baſi BC, & in eiſdem parallelis AD, BC conſtituta. dico ABC triangulum triangulo DBC æquale eſse. Producatur AD ex utraque parte in E,F puncta: & per B quidem ipſi CA parallela ducatur BE, per C vero ipſi BD parallela CF: parallelogrammũ (1) igitur eſt utrumq; ipſorum EBCA, DBCF, & parallelogrammum EBCA eſt æquale parallelogrammo DBCF, etenim in eadem ſunt baſi BC, & in eiſdem parallelis BC, EF, (2) eſtq; parallelogrammi quidem EBCA dimidium ABC triangulum, cum diameter AB ipſum

(1) 31. hujus. (2) 35. hujus.

ſum bifariam ſecet;(3) parallelogrammi vero DB CF dimidium triangulum DBC; diameter .n. DC ipſum bifariam ſecat. Quæ autem æqualium dimidia, inter ſe æqualia ſunt (4) Ergo triangulum ABC triangulo DBC eſt æquale. Triangula igitur in eadẽ baſi, & in eiſdem parallelis cõſtituta inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

(3) 34. hujus. (4) 7. com.not.

Theorema 28. Propoſitio 38. Triangula in baſibus æqualibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia.



Sint triangula ABC,DEF in æqualibus baſibus,BC,EF,& in eiſdem parallelis BF,AD cõſtituta. Dico ABC triangulum triãgulo DEF æquale eſſe. producatur enim AD ex utraque parte in G,H puncta: & per B quidem ipſi CA parallela ducatur BG (1) per F vero ducatur FH parallela ipſi DE. Parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorũ GBCA,DEFH. Atq; eſt parallelogrammum GBCA æqua-

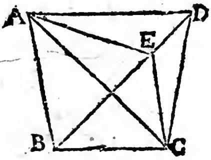
(1) 31. hujus.

æquale parallelogrammo DEFH: in æqualibus .n. ſunt baſibus BC,EF,& in eiſdem BF,GH parallelis. (2) Parallelogrami vero GBCA dimidium eſt ABC triangulum, nam diameter AB ipſum bifariam ſecat (3) Et parallelogrammi DEFH dimidium eſt triangulum DEF, diameter enim DF ipſum ſecat bifariam : quæ autem æqualium dimidia, inter ſe æqualia ſunt. (4) Ergo ABC triangulum triangulo DEF eſt æquale. Triangula igitur in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis conſtituta, inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

---

(2) 35. hujus. (3) 34. hujus. (4) 7. com. not.

Theorema 29. Propoſitio 39. Triangula æqualia in eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta, in eiſdem quoque ſunt parallelis.

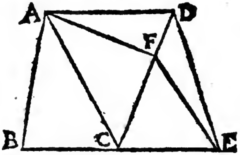


Sint æqualia triangula ABC, DBC in eadem baſi BC conſtituta, & ad eaſdem partes. Dico, & in eiſdem parallelis eſse. Iungatur .n. AD. Dico AD parallelam eſſe ipſi BC. Si enim non eſt parallela, ducatur per A punctum ipſi BC parallela recta linea AE, & EC jungatur. æquale igitur eſt ABC triangulum triangulo EBC. in eadem

.n.

-n. eſt baſi BC, & in eiſdem BC, AE parallelis. Sed ABC triangulum triangulo DBC eſt æquale. Ergo,& triangulum DBC æquale eſt ipſi EBC triangulo, majus minori, quod fieri non poteſt. Non igitur AE ipſi BC parallela eſt. Similiter oſtendemus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter ipſam AD. ergo AD ipſi BC eſt parallela. Triangula igitur æqualia, in eadem baſi, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 30. Propoſitio 40. Triangula æqualia in baſibus æqualibus, & ad eaſdem partes conſtituta in eiſdem quoque ſunt parallelis.

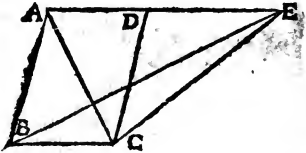


Sint æqualia triangula ABC, CDE in æqualibus baſibus BC, CE conſtituta. Dico etiam in eiſdem eſse parallelis. conjungatur enim AD. dico AD ipſi BE parallelam eſse. Nam ſi non eſt, ducatur per A ipſi BE parallela AF, & FE jungatur. triangulum igitur ABC triangulo FCE eſt æquale, cum in æqualibus baſibus, & in eiſdem parallelis BE, AF conſtituantur (1) ſed triangulum ABC æqua-

(1) 38. hujus.

æquale eſt triangulo DCE, ergo & triangulum DCE triangulo FCE æquale erit, majus minori, quod fieri non poteſt. non igitur AF ipſi BE eſt parallela. Similiter demonſtrabimus neque aliam quampiam parallelam eſſe, præter AD. ergo AD ipſi BF parallela erit. Aequalia igitur triangula in baſibus æqualibus, & ad eaſdem partes conſtituta, etiam in eiſdem ſunt parallelis. quod demonſtrare oportebat.

Theorema 31. *Propoſitio* 41. *Si parallelogrammum, & triangulum eandem baſim habeant in eiſdemque ſint parallelis; parallelogrammum ipſius trianguli duplum erit.*



Parallelogrammum enim ABCD, & triangulum EBC, baſim habeant eãdem BC, & in eiſdem ſint parallelis BC, AE. Dico parallelogrammum ABCD trianguli EBC duplum eſse. Iungatur .n. AC. triangulum igitur ABC triangulo EBC eſt æquale; namque in eadem baſi BC, & in eiſdem BC, AE parallelis conſtituitur. (1) Sed ABCD parallelogrammum

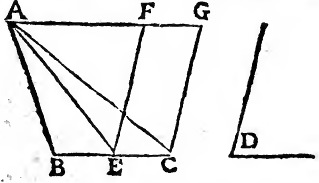
(1) 37. hujus.

mum duplum eſt trianguli ABC, cum diameter AC ipſum bifariam ſecet (2) Quare, & ipſius EBC trianguli duplum erit. Si igitur parallelogrammum, & triangulum eandem baſim habeant, & in eiſdem ſint parallelis; duplum erit parallelogrammum ipſius trianguli, quod demonſtrare oportebat.

(2) 34. hujus.

Problema 11. *Propoſitio* 42. *Dato triangulo æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.*

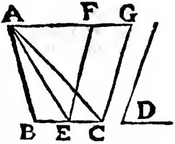
Sit datum triangulum ABC, datus autem rectilineus angulus D. Itaq; oportet, dato triangulo ABC æquale parallelogrammum conſtituere in angulo rectilineo ipſi D æquali. Secetur BC bifariam



in E, (1) & juncta AE, ad rectam lineã EC, atque ad punctum in ea E, conſtituatur angulus CEF æqua-
D lis

(1) 10. hujus.

lis ipſi D. (2) & per A quidem ipſi BC parallela ducatur AG: (3) per C verò ipſi FE ducatur parallela CG. parallelogrammum igitur eſt FECG. Et quoniam BE eſt æqualis EC, erit, & ABE triangulum triangulo AEC æquale; in æqualibus .n. ſunt baſibus BE, EC, & in eiſdem BC, AG parallelis.



(4) Ergo triangulum ABC trianguli AEC eſt duplū. Eſt autem, & parallelogrammum FECG duplum trianguli AEC, baſim .n. eandem habet, & in eiſdem eſt parallelis: (5) æquale igitur eſt FECG parallelogrammum triangulo ABC, habetq; CEF angulum æqualem angulo D dato. Dato igitur triangulo ABC æquale parallelogrammum FECG conſtitutum eſt, in angulo CEF, qui angulo D eſt æqualis. Quod quidem facere oportebat.

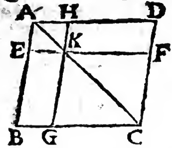
---

(2) 23. hujus. (3) 31. hujus. (4) 38. hujus (5) 41. hujus.

Theorema 32. Propoſitio 43. Omnis parallelogrammi ſpatiorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum ſupplementa inter ſe ſunt æqualia.

Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC, & circa ipſam AC parallelogramma quidem ſint EH, FG, quæ verò ſupplementa dicuntur BK, KD. Di-

Dico BK ſupplementum ſuplemēto KD æquale eſſe. Quoniam enim parallelogrammum eſt ABCD, & ejus



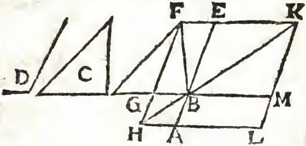
diameter AC, æquale eſt ABC triangulum triangulo ADC. (1) Rurſus quoniam EKHA parallelogrammum eſt, cujus diameter AK, triãgulum AEK triãgulo AHK æquale erit. Eadem ratione, & triangulum KGC triangulo KFC eſt æquale. Cum igitur triangulum quidē AEK æquale ſit triangulo AHK: triangulum verò KGC ipſi KFC; erit triangulum AEK una cum triangulo KGC æquale triangulo AHK una cum KFC triangulo. Eſt autem, & totum triangulum ABC æquale toti ADC. reliquum igitur BK ſupplementum reliquo ſupplemento KD eſt æquale, Ergo omnis parallelogrammi ſpatij, eorum, quæ circa diametrum ſunt, parallelogrammorum ſuplementa inter ſe æqualia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

(1) 34. hujus.

Problema 13. Propoſitio 44. Ad datam rectam lineam dato triangulo æquale parallelogrammum applicare in dato angulo rectilineo.

Sit data quidem recta linea AB; datum verò triangulum C: & datus angulus rectilineus D. oportet igitur ad datam rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum applicare in an-

gulo ipſi D æquali. Cōſtituatur triangulo C æquale parallelogrammum BEFG, in angulo EBG, (1) qui eſt æqualis D, & ponatur BE in directum ipſi AB, producaturq; FG, ad H: & per A alterutri ipſarum

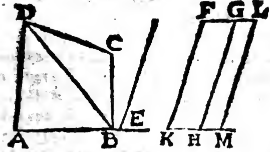


BG, EF parallela ducatur AH, (2) & HB jungatur. Quoniam igitur in parallelas AH, EF recta linea HF incidit, anguli AHF, HFE duobus rectis æquales ſunt. (3) Quare BHG, GFE duobus rectis ſunt minores, quæ vero à minoribus, quàm ſint duo recti, in infinitum producuntur, conveniunt inter ſe. (4) Ergo HB, FE productæ convenient. producantur, & conveniant in K; perque K alterutri ipſarum EA, FH parallela ducatur KL, (5) & HA, GB ad L, M puncta producanrur. parallelogrammum igitur eſt HLKF, cujus diameter HK, & circa HK parallelogramma quidem ſunt AG, ME; ea vero, quæ ſupplementa dicuntur, LB, BF: ergo LB ipſi BF eſt æquale. (6) Sed, & BF æquale eſt triangulo C. quare, & LB triangulo C æquale erit. Et quoniam GBE angulus æqualis eſt angulo ABM, (7) ſed & æqualis angulo D,

(1) 42. hujus (2) 31. hujus. (3) 29. hujus. (4) 5. poſt (5) 31. hujus. (6) Ex antecedēte. (7) 15. hujus.

D, erit & angulus ABM angulo D æqualis. Ad datam igitur rectam lineam AB, dato triangulo C æquale parallelogrammum conſtitutum eſt LB, in angulo ABM, qui eſt æqualis angulo D. Quod facere oportebat.

Problema 13. Propoſitio 45. Rectilineo dato æquale parallelogrammum conſtituere in dato angulo rectilineo.

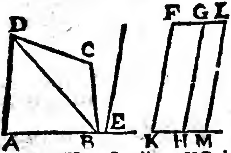


Sit datum rectilineum ABCD, datus vero angulus rectilineus E. Itaq; oportet rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtituere in angulo ipſi E æquali, conjungãtur enim DB, & conſtituatur triangulo ADB æquale parallelogrammum FH, in angulo HKF. (1) qui eſt æqualis angulo E. deinde ad rectam lineam GH applicetur triangulo DBC æquale parallelogrammum GM, in angulo GHM. (2) qui angulo E eſt æqualis. Et quoniam angulus E æqualis eſt utriq; ipſorum HKF, GHM, erit, & HKF angulo GHM æqualis; communis apponatur KHG. anguli igitur FKM, KHG angulis KHG, GHM æquales ſunt. Sed FKH, KHG sũt æquales duobus rectis (3) Ergo, & KHG, GHM duo-

D 3

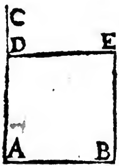
(2) 42. hujus. (2) Ex antecedente. (3) 29. hujus.

duobus rectis æquales erunt. Itaque ad aliquam rectam lineam GH, & ad datum in ea punctum H, duæ rectæ lineæ KH, HM non ad eaſdem partes poſitæ angulos deinceps duobus rectis æquales efficiũt. In directũ igitur eſt KH ipſi HM. (4) Et quoniam in parallelas KM, FL recta linea HG incidit, alterni anguli MHG, HGF æquales ſunt. (5) Communis apponatur HGL. anguli igitur MHG, HGL angulis HGF, HGL ſunt æquales. At anguli MHG, HGL æquales ſunt duobus rectis (6) Quare, & anguli HGF, HGL duobus rectis æquales erunt. In directum igitur eſt FG ipſi GL. Et quoniam KF ipſi HG, & æqualis eſt, & parallela; ſed, & HG ipſi ML; erit KF ipſi ML, & æqualis, & parallela, (7) ipſaſque conjungunt rectæ lineæ KM, FL. Ergo, & KM, FL æquales, & parallelæ ſunt. (8) Parallelogrammum igitur eſt KFLM, Quòd cum triangulum quidem ABD æquale ſit parallelogrammo HF: triangulum vero DBC parallelogrammo GM; erit totum ABCD rectilineum toti parallelogrammo KFLM æquale. Dato igitur rectilineo ABCD æquale parallelogrammum conſtitutum eſt KFLM in angulo FKM, qui eſt æqualis angulo E dato. Quod facere oportebat.



(4) 14. hujus. (5) 29. hujus (6) 34. hujus.
(7) 30 hujus. (8) 33. hujus.

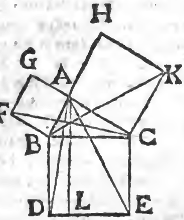
Problema 14. Propoſitio 45. A data recta linea quadratum deſcribere.



Sit data recta linea AB, oportet ab ipſa AB quadratum deſcribere. Ducatur rectæ lineæ AB à puncto in ea dato A ad rectos angulos AC; & ipſi AB æqualis ponatur AD; perque punctum D ducatur DE ipſi AB parallela, & per B ipſi AD parallela ducatur BE. parallelogrammum igitur eſt ADEB, & AB quidem eſt æqualis DE, AD verò ipſi BE: Sed, & BA ipſi AD eſt æqualis; quatuor igitur BA, AD, DE, EB inter ſe æquales ſunt, ideoque æquilaterum eſt ADEB parallelogrammum. Dico etiam rectangulum eſſe. Quoniam enim in parallelas AB, DE recta linea incidit AD, anguli BAD, ADE duobus rectis ſunt æquales. (1) Rectus autem eſt BAD. Ergo, & ADE rectus erit. parallelogrammorum verò ſpatiorum, quæ ex oppoſito ſunt latera, & anguli inter ſe æqualia ſunt (2) Rectus igitur eſt uterq; oppoſitorum ABE, BED angulorum: & ob id rectangulum eſt ADEB. Oſtenſum autem eſt æquilaterum eſſe. Quadratum igitur ſit neceſſe eſt, atq; eſt à recta linea AB deſcriptum, quod ipſum facere oportebat.

(1) 29. hujus. (2) 34. hujus.

Theorema 33. Propoſitio 47. In rectangulis triangulis, quod à latere rectum angulum ſubtendente deſcribitur quadratum, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur.



Sit triangulum rectangulum ABC, rectum habens BAC angulum. Dico quadratū deſcriptum à recta BC æquale eſſe quadratis, quę ab ipſis AB, AC deſcribūtur. Deſcribatur enim à BC quidē quadratū BDEC, ab ipſis verò BA, AC quadrata GB, HC, perq. A alterutri ipſarum BD, CE parallela ducatur AL; & AD, FC jungantur. Quoniam igitur uterque angulorum BAC, BAG rectus eſt, ad aliquam rectam lineam BA, & ad datum in ea punctum A duæ rectæ lineæ AC, AG non ad eaſdem partes poſitæ, angulos qui deinceps ſunt duobus rectis æquales efficiunt, In directum igitur eſt CA ipſi AG. (1) Eadem ratione, & AB ipſi AH eſt in directum. Et quoniam angulus DBC eſt æqualis angulo FBA, rectus .n. uterque eſt, & communis apponatur ABC: totus igitur DBA angulus toti FBC eſt æqualis. Quod cum duæ AB, BD duabus FB, BC æquales ſint, altera al-

(1) 14. hujus.

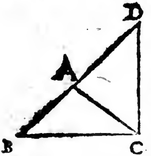
alteri, & angulus DBA æqualis angulo FBC; erit, & baſis AD baſi FC æqualis, & ABD triangulum triangulo FBC æquale (2) eſtque trianguli quidem ABD duplum BL parallelogrammum; baſim.n. eandem habent BD, & in eiſdem BD, AL ſunt parallelis (3) trianguli verò FBC duplum eſt GB quadratum; rurſus enim baſim habent eandem FB, & in eiſdem ſunt parallelis FB, GC. Quæ autem æqualium dupla, inter ſe æqualia ſunt. Ergo æquale eſt parallelogrammum BL ipſi GB quadrato. Similiter junctis AE, BK, oſtendetur etiam CL parallelogrammum æquale quadrato HC. Totum igitur BDC quadratum duobus quadratis GB, HC eſt æquale. Et deſcribitur quidem BDEC quadratum à recta linea BC; quadrata verò GB, HC ab ipſis BA, AC. quadratũ igitur BE, à latere BC deſcriptum æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur à lateribus BA, AC. Ergo in rectangulis triangulis quadratum, quod deſcribitur à latere rectum angulum ſubtendente, æquale eſt quadratis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus deſcribuntur. Quod oportebat demonſtrare.

(2) 4. hujus, (3) 41. hujus.

Theorema 34. Propoſitio 48. Si quadratum, quod deſcribitur ab uno laterum trianguli æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur; angulus reliquis duobus triãguli lateribus contentus rectus erit.

TRianguli enim ABC, quod ab uno latere BC deſcribitur quadratum, æquale ſit quadratis; quæ

quæ à reliquis trianguli lateribus B A, A C deſcribuntur. Dico angulum BAC rectum eſſe. Ducatur.n. à puncto A ipſi AC ad rectos angulos AD, (1) ponaturque AD ipſi BA æqualis, & DC jungatur. Quoniam igitur DA eſt æqualis AB, erit, & quadratum, quod deſcribitur ex DA, æquale quadrato, quod ex AB, commune apponatur quadratum, quod ex AC. ergo quadrata, quę ex DA, AC æqualia ſunt quadratis, quæ ex BA, AC deſcribuntur. Sed quadratis quidem, quæ ex DA, AC, æquale eſt, quod ex DC quadratum; rectus.n. angulus eſt DAC: quadratis verò, quæ ex BA, AC æquale ponitur quadratum, quod ex BC. quadratum igitur, quod ex DC æquale eſt ei, quod ex BC quadrato. Ergo, & latus DC lateri CB eſt æquale. Et quoniam DA eſt æqualis AB. communis autem AC, duæ DA, AC duabus BA, AC æquales ſunt, & baſis DC eſt æqualis baſi CB. angulus igitur DAC angulo BAC eſt æqualis (2) Rectus autem eſt DAC. ergo, & BAC rectus erit. Si igitur quadratum, quod deſcribitur ab uno laterum trianguli, æquale ſit quadratis, quæ à reliquis trianguli lateribus deſcribuntur, angulus reliquis duobus trianguli lateribus contentus rectus erit. Quod oportebat demonſtrare.



(1) 11.hujus. (2) 8.hujus.

Finis Libri Primi.

Eli-

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER SECUNDUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

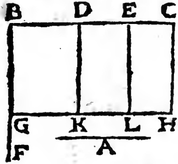
1. OMne parallelogrammum rectangulum contineri dicitur duabus rectis lineis, quæ rectum angulum conſtituunt.

2. Omnis parallelogrammi ſpatij unumquodque eorum, quæ circa diametrum ipſius ſunt, parallelogrammorum, cum duobus ſupplementis Gnomon vocetur.

Theorema 1. Propoſitio 1. Si ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum æquale eſt eis rectangulis, quæ recta linea inſecta, & ſingulis partibus continentur.

SInt duæ rectæ lineæ A, BC; & ſecta ſit BC utcumque in punctis D, E. dico rectangulum rectis lineis

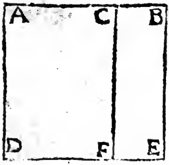
neis A, BC contentum æquale eſſe rectangulo, quod continetur A, BD, & rectangulo, quod A, DE, & ei, quod A, EC continetur. Ducatur .n. à puncto B, ipſi BC ad rectos angulos BF: (1) atque ipſi A ponatur æqualis BG: (2) & per G quidem ipſi BC parallela ducatur GH: (3) per D,E,C verò ducantur DK, EL, CH parallelæ ipſi *B*G rectangulum igitur BH eſt æquale rectangulis BK, DL, EH: atque eſt BH quidem, quod A, B C continetur; etenim continetur GB, BC; & BG ipſi A eſt æqualis; rectangulum autem BK, eſt quod continetur ipſis A,BD; continetur .n. GB, *B*D, quarum GB eſt æqualis A: & rectangulum DL, eſt quod continetur A,DE, quoniam DK, hoc eſt BG ipſi A eſt æqualis; & ſimiliter rectãgulum EH, eſt quod A, EC continetur, ergo rectangulum contentum A, BC eſt æquale rectangulo contento A, BD, & contento A, DE, & adhuc contento A, EC. Si igitur ſint duæ rectæ lineæ, altera autem ipſarum ſecta fuerit in quotcumque partes; rectangulum duabus rectis lineis contentum eſt equale eis, quæ recta linea inſecta, & ſingulis partibus continentur. Quod oportebat demonſtrare.



Theo-

(1) 11.primi. (2) 2.primi. (3) 31.primi.

Theorema 2. Propoſitio 2 Si recta linea ſecta fuerit utcumque; rectangula, quæ tota, & ſingulis partibus continentur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato.

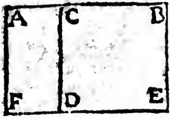


Recta enim linea AB ſecta ſit utcumque in puncto C dico rectangulum, quod AB, BC continetur, una cum contento BA, AC æquale eſſe quadrato, quod fit ex AD. deſcribatur. n. ex AB quadratum ADEB, (1) & per C ducatur alterutri ipſarum AD, BE parallela CF (2) æquale igitur eſt AE rectangulis AF, CE atque eſt AE quidem quadratum, quod ex AB; AF vero rectangulum contentum BA, AC; etenim DA, AC continetur, quarum AD ipſi AB eſt æqualis, & rectangulum CE continetur AB. BC, cum BE ſit æqualis AB. ergo rectangulum BAC una cum rectangulo ABC æquale eſt quadrato ex AB. Si igitur recta linea utcumque ſecta fuerit, rectangula, quæ tota, & ſingulis partibus continētur, æqualia ſunt ei, quod à tota fit, quadrato. Quod demonſtrare oportebat.

(1) 46. primi. (2) 31. primi.

Theo-

Theorema 3. Propoſitio 3. Si recta linea utcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, & una ejus parte contentum æquale eſt, & rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à prædicta parte fit, quadrato.

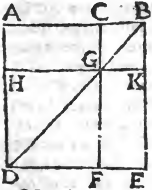


Recta enim linea AB ſecta ſit utcunque in puncto C. Dico ABC rectangulũ æquale eſse rectangulo ACB unà cum quadrato, quod fit ex BC. deſcribatur .n ex BC quadratum CDEB (1) producaturque ED in F; & per A alterutri ipſarum CD, BE parallela ducatur AF (2) æquale utique erit rectangulum AE ipſis AD, CE: & eſt AE quidem rectangulum contentum AB, BC; etenim AB, BE continetur, quarum BE eſt æqualis BC: rectangulum verò AD eſt quod continetur AC, CB, cum DC ipſi BC ſit æqualis: & DB eſt quadratum, quod fit ex BC. ergo rectangulum ABC eſt æquale rectangulo ACB unà cum quadrato, quod ex BC. Si igitur recta linea utcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, & una ejus parte contentum, æquale eſt rectangulo, quod partibus continetur, & ei, quod à prædicta parte fit quadrato.

(1) 46. primi. (2) 31 primi.

Theo-

Theorema 4. Propoſitio 4. Si recta linea ſecta fuerit utcumque, quadratum, quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei, quod bis partibus continetur, rectangulo.

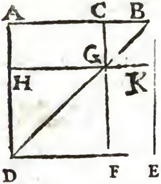


RECta .n. linea AB ſecta ſit utcumque in C. dico quadratum, quod fit ex AB æquale eſse, & quadratis ex AC, CB, & ei rectãgulo, quod bis AC, CB continetur. deſcribatur .n. ex AB quadratum ADEB; (1) jungaturque BD, & per C quidem alterutri ipſarum AD, BE parallela ducatur CGF; (2) per G vero alterutri ipſarum AB, DE ducatur parallela HK Et quoniam CF eſt parallela ipſi AD, & in ipſas incidit BD: erit exterior angulus BGC interiori, & oppoſito ADB æqualis: (3) angulus autem ADB eſt æqualis angulo ABD, quod, & latus BA æquale eſt lateri AD (4) quare CGB angulus angulo GBC eſt æqualis: ac propterea latus BC lateri CG æquale. (5) Sed, & latus CB æquale eſt lateri GK, & CG ipſi BK. (6) ergo & GK eſt æquale KB. & CGKB æquilaterum eſt. dico inſuper etiam rectangulum eſſe. quoniam n. CG eſt parallela ipſi BK, & in ipſas incidit GB; anguli KBC, GCB duobus [illegible] his

ſunt

(1) 46 primi. (2) 34. primi. (3) 29. primi. (4) 5. primi. (5) 6. primi (6) 34. primi.

ſunt æquales. (7) rectus autem eſt RBC angulus. ergo, & rectus GCB, & anguli oppoſiti CGK, GKB recti erunt. (8) rectangulum igitur eſt CGKB. Sed oſtenſum fuit, & æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt CGKB, quod quidem fit ex BC. eadem ratione, & HF eſt quadratum, quod fit ex HG. hoc eſt ex AC. ergo HF, CK ex ipſis AC, CB quadrata ſunt, &



quoniam rectangulum AG eſt æquale rectangulo GE (9) atque eſt AG, quod AC, CB continetur, eſt .n. GC ipſi CB æqualis: erit & GE æquale ei, quod continetur AC,CB, quare rectangula AG, GE æqualia ſunt ei, quod bis AC, CB continetur. Sunt autem, & HF, CK quadrata ex AC, CB. quatuor igitur HF, CK, AG, GE, & quadratis ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur rectangulo ſunt æqualia, ſed HF, CK, AG, GE ſunt totum ADEB quadratum, quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB æquale eſt, & quadratis ex AC, CB, & ei, quod bis AC, CB cõtinetur rectangulo; quare ſi recta linea utcunque ſecta fuerit, quadratum, quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo, quod bis partibus continetur, atque illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex AB æquale eſſe, & qua-

(7) 29. primi. (8) 34. primi. (9) 43. primi.

& quadratis ex AC, CB, & ei rectangulo, quod bis AC, CB. continetur: quoniam .n. in eadem figura æqualis eſt BA ipſi AD;& angulus ABD angulo ADB æqualis erit: (10) & cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint æquales; (11) erunt trianguli ABD tres anguli ABD, ADB. BAD æquales duobus rectis. rectus autem eſt angulus BAD, ergo reliqui ABD, ADB ſunt uni recto æquales, & ſunt æquales inter ſe ſe. uterque igitur ipſorum ABD, ADB eſt recti dimidius. Sed rectus eſt BCG, æqualis namque eſt angulo oppoſito, qui ad A. (12.) reliquus igitur CGB dimidius eſt recti: ac propterea CGB angulus angulo CBG eſt æqualis, & latus BC æquale lateri CG. (13) Sed CB eſt æqualis GK, & CG ipſi BK. (14) æquilaterum igitur eſt CK, & cum habeat rectum angulum CBK, etiam eſt quadratum;quod quidem fit ex CB. eadem ratione, & HF quadratum eſt, & æquale quadrato, quod ex AC. quadrata igitur sũt CK, HF, & quadratis ex AC, CB æqualia. Rurſus quoniam rectangulum AG eſt æquale ipſi GE (15) atque eſt AG id quod AC, CB continetur, eſt enim CG ipſi CB æqualis:erit & GE æquale contento AC, CB. quare AG, GE æqualia ſunt ei, quod bis AC, CB continetur. Sunt autem, & CK, HF æqualia quadratis ex AC, CB, ergo CK, HF, AG, GE æqualia ſunt, & quadratis ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur. Sed CK, HF,& AG,GE ſunt totum AE,quod fit ex AB quadratum. quadratum igitur ex AB æquale

 le

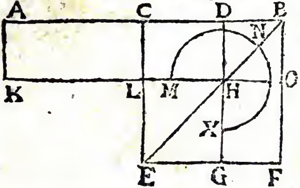
(10) 5. primi. (11) 32. primi. (12) 29.primi. (13) 6. primi. (14) 34. primi. (15) 43. primi.

le eſt, quadratiſquè ex AC, CB, & ei quod bis AC, CB continetur rectangulo: Quod oſtēdere oportebat.

COROLLARIUM.

Ex hoc perſpicue conſtat in quadratis ſpatijs parallelogrāma, quæ ſunt circa diametrum, quadrata eſſe.

Theorema 5. Propoſitio 5. Si recta linea ſecta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum una cum quadrato lineæ, quæ inter ſectiones interjicitur, æquale eſt ei, quod à dimidia fit quadrato.



Recta .n. linea quædam AB ſecta ſit in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico rectangulum contentum AD, DB unà cum quadrato, quod fit ex CD æquale eſse ei, quod ex CB, quadrato. Deſcribatur .n. ex BC quadratum CEFB: (1) jungaturque BE; & per D quidem alterutri ipſarum CE, BF parallela ducatur DHG; (2) per H verò ducatur KLO parallela alterutri ipſarum CE, BF: & rurſus per A ducatur alterutri CL, BO parallela AK. & quoniam CH ſupplementum æquale eſt ſupplemento HF, (3) com-

(1) 46. primi. (2) 31. primi (3) 43. primi.

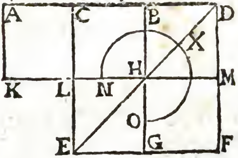
commune apponatur DO;totum igitur CO toti DF eſt æquale. ſed CO eſt æquale AL; quoniam & AC ipſi CB. (4) ergo & AL æquale eſt DF. commune apponatur CH. totum igitur AH ipſis FD,DL æquale erit. Sed AH quidē eſt quod AD DB cōtinetur, etenim DH ipſi DB eſt æqualis;FD,DL verò eſt gnomōMNX. gnomon igitur MNX æqualis eſt ei, quod AD, DB continetur, commune apponatur LG, æquale ſc licet quadrato, quod ex CD. ergo MNX gnomon, & LG æqualia ſunt rectangulo, quod continetur AD, DB, & ei, quod fit ex CD quadrato. Sed MNX gnomon, & LG ſunt totum quadratum CEFB,quod quidem fit ex CB, ergo rectangulum ADB una cum quadrato, quod ex CD æquale eſt ei, quod ex CB quadrato. Si igitur recta linea ſecta fuerit in partes æquales, & in partes inæquales, rectangulum inæqualibus totius partibus contentum unà cum quadrato lineæ, quæ inter ſectiones interjicitur, æquale eſſe ei, quod à dimidia fit quadrato. quod demonſtrare oportebat.

(4) 36. primi.

Theorema 6. Propoſitio 6. Si recta linea bifariam ſecetur, atque ipſi in rectum adjiciatur quædam recta linea; rectangulum tota cum adjecta, & adjecta contentum, una cum quadrato dimidiæ, æquale eſt quadrato, quod ab ea, quę ex dimidia, & adjecta conſtat tãquam ab una linea deſcribitur.

Recta enim linea quædam AB ſecetur bifariam in puncto C, adjiciaturque ipſi in rectum BD.

Dico rectangulum ADB unà cum quadrato ex BC æquale eſſe ei, quod fit ex CD quadrato. Deſcribatur .n. ex CD quadratum CEFD, (1) & jungatur DE; perque B alterutri ipſarum CE, DF parallela ducatur BHG: (2) & per H ducatur KLM parallela alterutri ipſarum



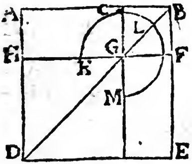
AD, EF; & adhuc per A alterutri CL, DM parallela AK. Itaque quoniam AC eſt æqualis CB; erit, & rectangulum AL rectangulo CH æquale. (3) Sed CH æquale eſt HF. (4) Ergo, & AL ipſi HF æquale erit. Commune apponatur CM. totum igitur AM gnomoni NXO eſt æquale: atque eſt AM, quod AD,DB continetur. etenim DM eſt æqualis DB Ergo,& gnomon NXO æqualis eſt rectangulo ADB. Rurſus commune apponatur LG, æquale ſcilicet quadrato, quod ex CB. rectangulum igitur ADB unà cum quadrato, quod ex BC æquale eſt gnomoni *NXO* & ipſi *LG*. Sed gnomon NXO, & LG totum ſunt CEFD quadratum; quod quidem fit ex CD. Ergo rectangulum ADB una cum quadrato ex BC æquale eſt ei, quod fit ex CD quadrato. Si igitur recta linea ſecetur biſariam, adjiciaturque ipſi in rectum quædam recta linea; rectan-

---

(1) 46. primi. (2) 31. primi. (3) 36. primi. (4) 43. primi.

ſtangulum tota cum adjecta, & adjecta contentum unà cum quadrato dimidiæ æquale eſt quadrato, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta conſtat, tanquam ab una linea deſcribitur. quod oportebat demonſtrare.

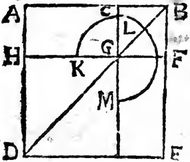
Theorema 7. Propoſitio 7. Si recta linea utcumque ſecta fuerit, quæ à tota, & una parte ſiunt utraque quadrata æqualia ſunt, & rectangulo, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte ſit quadrato.



RECta enim linea quædam AB ſecta ſit utcumque in puncto C. Dico quadrata ex AB, BC æqualia eſse, & rectangulo, quod bis AB, BC continetur, & ei quod fit ex AC quadrato. Deſcribatur enim ex AB quadratum ADEB (1) & figura conſtruatur: Itaque quoniam AG rectangulum æquale eſt rectangulo GE. (2) cõmune apponatur CF, quare totum AF toti CE eſt æquale; rectangula igitur AF, CE dupla ſunt rectanguli AF. Sed AF, CE ſunt KLM guomon, & quadratum CF, ergo KLM gnomon, & quadratum CF dupla erunt rectanguli AF. eſt autem id quod bis AB, BC

(1) 46. primi. (2) 43. primi.

BC continetur duplum ipſius AF ; etenim BF eſt æqualis BC. gnomon igitur KLM, & quadratum CF



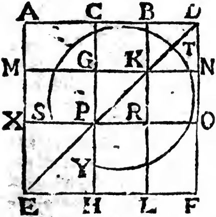
æqualia ſunt, ei quod bis AB, BC continetur. commune apponatur DG, quod eſt ex AC quadratum. Ergo gnomon KLM, & quadrata BG, GD æqualia ſunt ei, quod bis AB, BC continetur, & quadrato ex AC. at gnomō KLM, & quadrata BG, GD totum ſunt ADEB, & CF; quæ ſunt ex AB, BC quadrata. quadrata igitur ex AB, BC æqualia ſunt rectangulo, quod bis AB, BC continetur unà cū eo, quod fit ex AC quadrato. Ergo ſi recta linea utcumque ſecta fuerit; quæ à tota, & una parte fiunt utraque quadrata æqualia ſunt rectangulóque, quod bis tota, ac dicta parte continetur, & ei, quod à reliqua parte fit, quadrato; quod oſtendere oportebat.

Theorema 8. Propoſitio 8. Si recta linea utcumque ſecta fuerit; quod quater tota, & una parte continetur rectangulum unà cum quadrato reliquæ partis, æquale eſt quadrato quod ex tota, & dicta parte tamquam ex una linea deſcribitur.

Recta enim linea AB ſecta ſit utcumque in C. Dico rectangulum quater AB, BC contentum, una cum quadrato, quod ex AC, æquale eſſe quadra-

to,

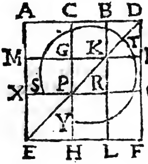
to, quod ex AB, BC. tamquam ex una linea deſcribitur. Producatur .n. recta linea AB in D; & ipſi CB ponatur æqualis BD; deſcribaturque ex AD quadratum AEFD; & dupla figura conſtruatur. Quoniam igitur CB eſt æqualis BD atque eſt CB ipſi GK æqualis; BD verò ipſi KN: erit, & GK æqualis KN (1) eadem ratione, & PR ipſi RO eſt æqualis, & quoniam CB eſt æqualis BD, & CK ipſi KN; erit rectangulum quidem CK rectangulo



KD (2) rectangulum verò GR ipſi RN æquale. Sed CK eſt æquale RN, (3) ſupplementa .n. ſunt parallelogrammi CO. Ergo & KD æquale eſt GR, & quatuor rectangula DK, KC GR, RN inter ſe æqualia: ideoque quadrupla ſunt rectanguli CK. Rurſus quoniam CB eſt æqualis BD, & BD quidem ipſi BK, hoc eſt ipſi CG æqualis; CB verò ipſi GK, hoc eſt GP: erit & CG æqualis GP. eſt autē & PR ipſi RO æqualis. rectangulum igitur AG rectangulo MP, & rectāgulum PL ipſi RF æquale erit. Sed MP eſt æquale PL; (4) ſupplementa enim ſunt ML parallelogrammi. Quare, & AG ipſi RF eſt æquale. quatuor igitur

(1) 34. primi. (2) 36. primi. (3) 43. primi. (4) 43. primi.

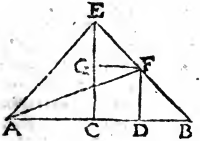
AG, MP, PL, RF inter ſe æqualia ſunt. ac propterea ipſius AG quadrupla. Oſtenſum autem eſt, & quatuor CK, KD, GR, RN quadrupla eſſe CK. Quare octo continentia gnomonem STY ipſius AK quadrupla ſunt. Et quoniam AK eſt quod AB, BC continetur; etenim BK eſt æqualis BC; erit cõtentum quater AB, BC, ipſius AK quadruplum. At demonſtratus eſt gnomon STY quadruplus AK.



Quod igitur quater AB, BC continetur æquale eſt gnomoni STY. Commune apponatur XH, quod quidem quadrato ex AC eſt æquale. Ergo quod quater AB, BC continetur unà cum quadrato ex AC æquale eſt ipſi STY gnomoni, & quadrato XH. Sed STY gnomon, & XH totum ſunt AEFD quadratum, quod deſcribitur ex AD. Rectangulum igitur quater AB, BC contentum unà cum quadraro ex AC æquale eſt ei, quod ex AD, hoc eſt ex AB, BC tamquam ex vna linea deſcribitur, quadrato. Ergo ſi recta linea utcumque ſecta fuerit; quod quater tota, & una parte continetur rectangulum, unà cum quadrato reliquæ partis æquale eſt quadrato, quod ex tota, & dicta parte tamquam ex una linea deſcribitur. Quod oſtendendum fuerat.

Theo-

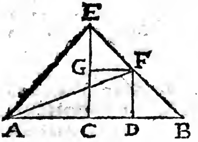
Theorema 9. Propoſitio 9. Si recta linea in partes æquales, & in partes inæquales ſecta fuerit, quadrata, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur, dupla ſunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur.



Recta .n. linea quædam AB ſecta ſit in partes æquales ad C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata ex AD, DB, quadratorum ex AC, CD dupla eſſe. Ducatur .n. à puncto C ipſi AB ad rectos angulos CE, (1) & utrique ipſarum AC, CB æqualis ponatur, junganturque EA, EB. ac per D quidem ipſi CE parallela ducatur DF; (2) per F verò ipſi AB parallela FG, & AF jungatur. itaque quoniam AC eſt æqualis CE; erit, & angulus EAC angulo AEC æqualis. (3) Et cum rectus ſit angulus ad C, reliqui AEC, EAC uni recto æquales erunt. (4) & ſunt æquales inter ſe ſe, uterque igitur ipſorum AEC, EAC recti eſt dimidius. eadem ratione, & recti dimidius eſt uterque ipſorum CEB, EBC. ergo totus angulus AEB rectus eſt. & quoniam angulus GEF dimidius eſt recti, rectus

(1) 11. primi. (2) 31. primi. (3) 5. primi. (4) 32. primi.

ctus autem EGF; æqualis .n. eſt interiori,& oppoſito ECB,(5)erit, & reliquus EFG recti dimidius:æqualis igitur eſt GEF angulus ipſi EFG. quare,& latus FG lateri GE eſt æquale.(6)Rurſus quoniã angulus ad B dimidius eſt recti, rectus autem FDB, quòd ſit æqualis interiori, & oppoſito ECB: reliquus BFD recti

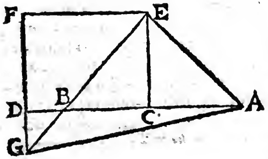


erit dimidius. angulus igitur ad B æqualis eſt angulo DFB: ideoque latus DF lateri DB æquale, & quoniam AC eſt æqualis CE, erit, & ex AC quadratum æquale quadrato ex CE quadrata igitur ex AC, CE dupla ſunt quadrati ex AC quadratis autem ex AC, CE æquale eſt quadratum ex EA, ſiquidem rectus eſt angulus ACE. (7) ergo quadratum ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniam EG æqualis eſt GF ; & quadratum ex EG quadrato ex GF eſt æquale quadrata igitur exEG,GF dupla sũt quadrati ex GF. at quadratis ex EG, GF æquale eſt quod ex EF quadratum. Ergo quadratum ex EF quadrati ex GF duplum erit. æqualis autem eſt GF ipſi CD. quadratum igitur ex EF duplum eſt quadrati ex CD. Sed & quadratum ex AE quadrati ex AC eſt duplum. ergo quadrata ex AE, EF dupla ſunt quadratorum ex AC, CD. quadratis verò ex AE, EF æquale eſt ex AF qua-

(5) 29. primi. (6) 6. primi. (7) 47. primi.

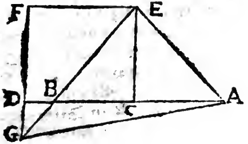
quadratum, quoniam angulus AEF rectus eſt. quadratum igitur ex AF quadratorum ex AC, CD eſt duplum. Sed quadrato ex AF ęqualia ſunt ex AD, DF quadrata. rectus enim eſt angulus qui ad D. ergo ex AD, DF quadrata dupla ſunt quadratorum ex AC, CD, eſt autem DF ipſi DB æqualis quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla erunt. Quare ſi recta linea in partes æquales, & in partes inæquales ſecta fuerit, quæ ab inæqualibus totius partibus deſcribuntur quadrata dupla ſunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati lineæ ejus, quæ inter ſectiones interjicitur. quod oſtendere oportebat.

Theorema 10. *Propoſitio* 10. *Si recta linea ſecetur bifariam, & ipſi in rectum quadam recta linea adjiciatur, quæ à tota cum adjecta, & adjecta ſiunt utraque quadrata dupla ſunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea quæ ex dimidia, & adjecta conſtat, tamquam ab una linea deſcribitur.*



Recta enim linea AB ſecetur bifariam in C, & ipſi in rectum adjiciatur quædam recta linea BD. dico quadrata ex AD, DB quadratorum ex AC, CD dupla eſſe. ducatur enim à puncto

ℓto C ipſi AB ad rectos angulos CE, (1) & utrique ipſarum AC, CB æqualis ponatur; junganturq; AE,



EB, & per E quidem ipſi AD parallela ducatur EF; (2) per D verò ducatur DF parallela ipſi CE. & quoniam in parallelas EC, FD recta quædã linea EF incidit, anguli CEF, EFD æquales ſunt duobus rectis. (3) anguli igitur FEB, EFD duobus rectis ſunt minores, quæ autem à minoribus, quam ſint duo recti in infinitum producuntur, conveniũt inter ſeſe. (4) Ergo EB, FD productæ ad partes BD convenient; producantur, & conveniant in puncto G, & AG jungatur. itaque quoniam AC eſt æqualis CE, & angulus AEC angulo EAC æqualis erit: (5) atque eſt rectus qui ad C. uterque igitur ipſorum EAC, AEC eſt recti dimidius. eadem ratione, & recti dimidius eſt uterque CEB, EBC. ergo AEB eſt rectus, & quoniam EBC eſt dimidius recti; erit, & recti dimidius DBG; (6) cum ſit ad verticem, Sed, & BDG rectus eſt; etenim eſt æqualis ipſi DCE alterno. (7) reliquus igitur DGB dimidius eſt recti, & ob

(1) 11. primi. (2) 31. primi. (3) 29. primi.
(4) Ex demonſtratis ad 29. primi. (5) 5. primi.
(6) 15. primi. (7) 29. primi.

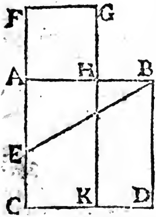
ob id ipſi DBG æqualis. ergo & latus BD æquale lateri DG (8) rurſus quoniam EGF eſt dimidius recti, rectus autem, qui ad F, eſt enim angulo oppoſito qui ad C æqualis; erit, & reliquus FEG rect dimidius, & æqualis ipſi EGF. quare & latus GF lateri EF eſt æquale. & cum EC ſit æqualis CA; & quadratum ex EC æquale eſt ei, quod ex CA, quadrato. ergo quadrata ex EC, CA dupla ſunt quadrati ex CA. quadratis autem ex EC, CA æquale eſt quadratum ex EA. quadratum igitur ex EA quadrati ex AC eſt duplum. rurſus quoniã GF eſt æqualis FE, æquale eſt & ex GF quadratum quadrato ex FE. quadrata igitur ex GF, FE quadrati ex EF ſunt dupla. at quadratis ex GF, FE, æquale eſt, quod ex EG quadratum, ergo quadratum ex EG duplum eſt quadrati ex EF. æqualis autem eſt EF ipſi CD quadratum igitur ex EG quadrati ex CD duplum erit. Sed oſtenſum eſt. quadratum ex EA duplum quadrati ex AC. ergo ex AE, EG quadrata quadratorum ex AC, CD ſunt dupla. quadratis verò ex AE, EG æquale eſt quod ex AG quadratum. quadratum igitur ex AG duplum eſt quadratorum ex AC, CD. at quadrato ex AG æqualia ſunt ex AD, DG quadrata. ergo quadrata ex AD, DG ſunt dupla quadratorum ex AC, CD. Sed DG eſt æqualis DB. quadrata igitur ex AD, DB quadratorum ex AC, CD ſunt dupla. Ergo ſi recta linea bifariam ſecetur, & ipſi in rectum quædam recta linea adjiciatur; quæ à tota cum adjecta, & adjecta fiũt utraq;

qua-

(8) 5. primi.

quadrata dupla ſunt, & quadrati dimidiæ, & quadrati, quod ab ea, quæ ex dimidia, & adjecta conſtat tamquam ab una linea deſcribitur. quod oſtendere oportebat.

Problema I. *Propoſitio* II. *Datam rectam lineam ſecare, ita ut, quod tota, & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato.*



SIt data recta linea AB. oportet ipſam AB ita ſecare, ut quod tota, & altera parte continetur rectangulum æquale ſit ei, quod à reliqua parte fit, quadrato. Deſcribatur .n. ex AB quadratum ABDC: ſeceturque AC bifariam in E, & BE jungatur: deinde producta CA in F, ponatur ipſi BE æqualis EF: deſcribaturque ex AF quadratum FGHA: & GH ad K producatur. Dico AB ſectam eſſe in H, ita ut ABH rectangulum æquale ſit quadrato ex AH. Quoniam .n. recta linea AC bifariam ſecatur in E; adjiciturq; ipſi in rectum AF. rectangulum CFA una cum quadrato ex AE æquale erit quadrato ex EF. (1) Sed EF eſt æqualis EB rectangulum igitur CFA una cum quadrato ex AE æquale eſt ei, quod fit ex EB, quadra-

(1) 6. hujus.

drato. quadrato autem ex EB æqualia ſunt quadrata ex BA, AE (2) etenim angulus ad A rectus eſt. ergo rectangulum CFA una cum quadrato ex AE æquale eſt quadratis ex BA, AE. commune auferatur, quod ex AE quadratum. reliquum igitur rectangulum CFA æquale eſt quadrato ex AB: eſt autem CFA quidem rectangulum FK. ſi quidem AF eſt æqualis FG: quadratum autem ex AB eſt ipſum AD. rectangulum igitur FK æquale eſt quadrato AD. commune auferatur AK, ergo reliquum FH reliquo HD eſt æquale. atque eſt HD rectangulum ABH, cum AB ſit æqualis BD, & FH eſt quadratum ex AH. rectangulum igitur ABH quadrato ex AH æquale erit. Quare data recta linea AB ſecta eſt in H, ita ut ABH rectangulum quadrato ex AH ſit æquale. Quod facere oportebat.

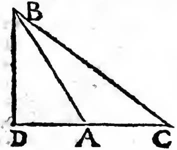
(2) 47. primi.

Theorema 11. Propoſitio 12. In obtuſangulis triangulis, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit quadratum, majus eſt, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, in quod ſcilicet protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum.

Sit obtuſangulum triangulum ABC. obtuſum angulum habens BAC: & ducatur à puncto B ad CA protractam perpendicularis BD. (1) Dico quadra-

(1) 12. primi.

dratum ex BC majus eſſe, quam quadrata ex BA, AC, rectangulo, quod bis CA, AD continetur. Quoniam

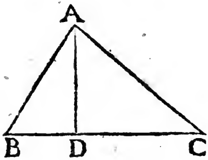


enim recta linea CD ſecta eſt utcumque in puncto A, erit quadratum ex CD æquale, & quadratis ex CA, AD, & ei quod bis CA, AD continetur rectangulo. (2) Commune apponatur ex DB quadratum. Quadrata igitur ex CD, DB æqualia ſunt, & quadratis ex CA, AD, DB, & rectangulo, quod bis CA, AD continetur. Sed quadratis ex CD, DB æquale eſt quadratum ex CB (3) Rectus enim eſt angulus ad D, cum ſit BD perpendicularis. Quadratis verò ex AD, DB æquale eſt quadratum ex AB. Quadratum igitur ex CB æquale eſt, & quadratis ex CA, AB, & rectangulo bis CA, AD contento. Ergo quadratum ex CB majus eſt, quàm quadrata ex CA AB, rectangulo quod bis CA, AD continetur. In obtuſangulis igitur triangulis, quadratum, quod à latere obtuſum angulum ſubtendente fit, majus eſt quam quadrata; quæ fiunt à lateribus obtuſum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ ſunt circa obtuſum angulum, ad quod protractum perpendicularis cadit, & linea aſſumpta exterius à perpendiculari ad angulum obtuſum. Quod demonſtrare oportebat.

Theo-

(2) 4. hujus. (3. 47. primi.

Theorema 12. *Propoſitio* 13. *In acutangulis triangulis, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit quadratum, minus eſt, quam quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum.*



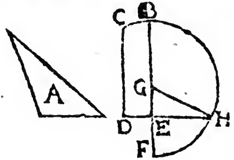
SIt acutangulum triãgulum ABC acutum habens angulum ad B: & ducatur à puncto A, ad BC perpendicularis AD. (1) Dico quadratum, quod fit ex AC minus eſſe, quam quadrata, quæ ex CB, BA, rectangulo, quod bis CB, BD continetur. Quoniam enim recta linea CB ſecta eſt utcumque in D, erunt quadrata ex CB, BD æqualia & rectangulo, quod bis CB, BD continetur, & quadrato ex DC. (2) commune apponatur, quod ex AD quadratum. Quadrata igitur ex CB, BD, DA æqualia ſunt, & rectangulo bis CD, BD contento, & quadratis ex AD, DC. Sed quadratis ex BD, DA æquale eſt quod ex AB quadratum; (3) rectus enim angulus eſt qui ad D. quadratis verò ex AD, DC æquale eſt quadratum ex AC. quadra-

F ta

(1) 12. primi. (2) 7. hujus. (3) 47. primi.

ta igitur ex CB, BA ſunt æqualia quadrato ex AC, & ei, quod bis CB, BD continetur, rectangulo. quare ſolum quadratum ex AC minus eſt quam quadrata ex CB, BA rectangulo, quod bis CB, BD continetur. In acutangulis igitur triangulis quadratum, quod à latere acutum angulum ſubtendente fit, minus eſt quam quadrata, quæ fiunt à lateribus acutum angulum continentibus, rectangulo contento bis uno laterum, quæ ſunt circa acutum angulum, in quod perpendicularis cadit, & linea à perpendiculari intus aſſumpta ad angulum acutum. Quod demonſtrare oportebat.

Problema 2. Propoſitio 14. Dato rectilineo æquale quadratum conſtituere.



Sit datum rectilineum A. Oportet ipſi A rectilineo æquale quadratum conſtituere. conſtituatur rectilineo A æquale parallelogrammum rectangulum BCDE. (1) Si igitur BE eſt æqualis ED factum jam erit, quod proponebatur; etenim rectilineo A æquale quadratum cõſtitu-

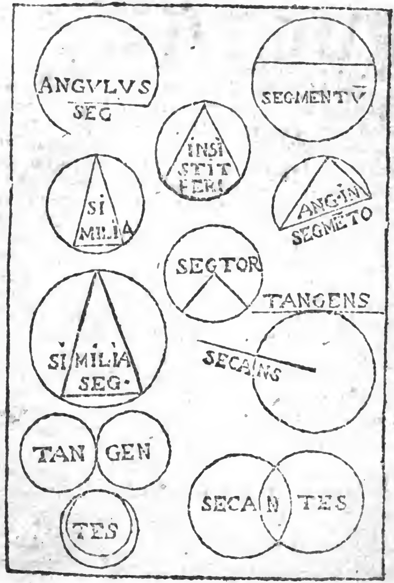
(1) 45. primi.

ſtitutum eſt BD: ſin minus, una ipſarum BE, ED major eſt. ſit BE major, & producatur ad F, ponaturque ipſi ED æqualis EF. deinde ſecta FB bifariam in G centro quidem G, intervallo autem una ipſarum GB, GF ſemicirculus deſcribatur BHF; producaturq; DE in H, & GH jungantur. Quoniam igitur recta linea BF ſecta eſt in partes æquales ad G, & inæquales ad E; erit rectangulum BEF unà cum quadrato, quod fit ex EG æquale quadrato ex GF. (1) eſt autem GF æqualis GH. Rectangulum igitur BEF una cum quadrato ex GE æquale eſt quadrato ex GH. Sed quadrato ex GH æqualia ſunt ex HE, EG quadrata. Ergo rectangulum BEF una cum quadrato ex EG æquale eſt quadratis ex HE, EG. Commune auferatur ex EG quadratum. Reliquum igitur rectangulum BEF eſt æquale quadrato ex EH. Sed rectangulum BEF eſt ipſum BD parallelogrammum, quoniam EF eſt æqualis ED. Ergo BD parallelogrammum quadrato ex EH eſt æquale. Parallelogrammum autem BD eſt æquale rectilineo A. Rectilineum igitur A quadrato ex EH deſcripto æquale erit. Quare dato rectilineo A æquale quadratum conſtitutum eſt, quod videlicet ex ipſa EH deſcribitur. Quod facere oportebat.

Finis Libri Secundi.

EU-

(1) 5. hujus.



ANGVLVS
SEG
SEGMENTV̄
INSI
STIT
PERI
SI
MILIA
ANG·IN
SEGMĒTO
SEGTOR
TANGENS
SI MILIA
SEG·
SECANS
TAN
GEN
TES
SECA
N
TES

EUCLIDIS ELEMENTORUM.

LIBER TERTIUS.

Ex traditione Federici Commandini

DIFFINITIONES.

1. AEquales circuli ſunt, quorum diametri ſunt æquales, vel quorum, quæ ex centris ſunt æquales.
2. Recta linea circulum contingere dicitur, quæ contingens circulum, & producta ipſum non ſecat.
3. Circuli contingere ſeſe dicuntur, qui contingentes ſe ipſos non ſecant.
4. In circulo æqualiter diſtare à centro rectæ lineæ dicuntur, quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ ſunt æquales.
5. Magis autem diſtare à centro dicitur ea, ad quam major perpendicularis cadit.
6. Portio circuli eſt figura, quæ recta linea, & circuli circumferentia continetur.

7. Portionis autem angulus eſt, qui recta linea, & circuli circumferentia comprehenditur,

8. In portione angulus eſt, quando in circumferentia portionis ſumitur aliquod punctum, atque ab ipſo ad terminos lineæ ejus, quæ baſis eſt portionis, rectæ lineæ ducuntur: angulus vero ductis lineis ſit contentus.

9. Quando autem continentes angulum rectæ lineæ aſſumunt circumferentiam, in illa conſiſtere angulus dicitur.

10. Sector circuli eſt, quando angulus ad centrum conſtiterit, figura contenta rectis lineis angulum comprehendentibus, & circumferentia ab ipſis aſſumpta.

11. Similes circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales, vel in quibus anguli æquales conſiſtunt.

PROBLEMA I. PROPOSITIO I.

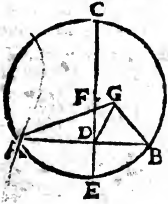
Dati circuli centrum invenire.

SIt datus circulus ABC. oportet circuli ABC centrum invenire. Ducatur in ipſo quædam recta linea AB utcumque, & in puncto D bifariam ſecetur. (1) à puncto autem D ipſi AB ad rectos angulos ducta DC (2) in E producatur; & ſecetur CE bifariam in F. Dico punctum F circuli ABC centrum

---

(1.) 10. primi. (2) 11. primi.

trum eſſe, Non .n: ſed, ſi fieri poteſt, ſit G, & GA, GD, GB junganrur. itaque quoniam AD eſt æqualis



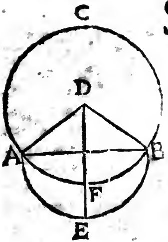
DB, communis autem DG, erunt duæ AD, DG duabus GD, DB, æquales altera alteri: & baſis GA æqualis eſt baſi GB (3) ſunt .n. ex centro G. angulus igitur ADG angulo GDB eſt æqualis. (4) Cum autem recta linea ſuper rectam lineã inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit. rectus eſt uterque æqualium angulorum. (5) Ergo angulus GDB eſt rectus. Sed, & rectus FDB. æqualis igitur eſt angulus FDB angulo GDB, major minori, quod fieri non poteſt. quare G non eſt circuli ABC centrũ. Similiter oſtendemus neque aliud eſſe, præter ipſum F. ergo F centrum eſt circuli ABC. quod facere oportebat

(3) Diff. 15. primi. (4) 8. primi. (5) Diff. 10. pr.

COROLLARIUM.

Ex hoc peſpicuum eſt, ſi in circulo quædam recta linea rectam lineam quandam biſariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante circuli centrum ineſſe.

Theorema 1. Propoſitio 2. Si in circumferentia circuli, duo quævis puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet.

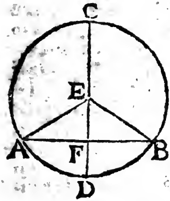


Sit circulus ABC, & in circũferentia ipſius ſumantur duo quævis puncta A, B. dico rectam lineam, quæ a puncto A ad B ducitur, intra circulum cadere. Non enim: ſed, ſi fieri poteſt, cadat extra, ut AEB, & ſumpto circuli ABC centro, quod ſit D, jungantur DA, DB, & producatur DF in E Quoniam igitur DA eſt æqualis DB; erit & angulus DAE angulo DBE æqualis. (2) & quoniam trianguli DAE unum latus AEB protenditur, angulus DFB angulo DAE major erit. (3) angulus autem DAE æqualis eſt angulo DBE. ergo DEB, angulus angulo DBE eſt major. Sed majori angulo majus latus ſubtenditur. (4) major igitur eſt DB ipſa DE, eſt aũt DB æqualis DF. Ergo DF eſt major DE, minor majore, quod fieri non poteſt. non igitur à puncto A ad B ducta recta linea extra circulum cadet. Similiter oſtendemus neque in

(1) Ex anteced. (2.) 5. primi. (3) 16. primi (4.) 18. primi.

in ipſam cadere circumferentiam. Ergo extra cadat neceſſe eſt. Si igitur in circumferentiam circuli duo quævis puncta ſumantur, quæ ipſa conjungit recta linea intra circulum cadet. quod oportebat demonſtrare.

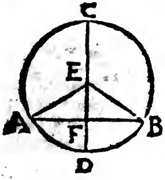
Theorema 2. Propoſitio 3. Si in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum biſariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit; quod ſi ad angulos rectos ipſam ſecet, & biſariam ſecabit.



Sit circulus ABC, & in ipſo recta linea per centrum ducta CD rectam lineam quandam AB non ductam per centrum biſariam ſecet in puncto F. Dico & ad angulos rectos ipſam ſecare. Sumatur .n. circuli ABC centrum, (1) quod ſit E, & AE, EB jungantur. quoniam igitur AF eſt æqualis FB, communis autem FE, duæ duabus æquales ſunt, & baſis EA baſi EB eſt æqualis, ergo & angulus AFE angulo BFE æqualis erit. Cum autem recta linea ſuper rectam inſiſtens, angulos, qui deinceps ſunt, æquales inter ſe fecerit, rectus eſt uterque æqualium an-

(1) 1. hujus.

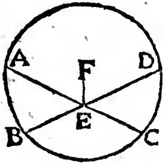
angulorum. (2) uterque igitur AFE, BFE eſt rectus. quare recta linea CD per centrum ducta rectam lineam AB non ductam per centrum bifariam ſecans, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. Sed CD ſecet AB ad rectos angulos. Dico, & bifariam ipſam ſecare, hoc eſt AF ipſi FB æqualem eſſe. Iiſdem .n. conſtructis, quoniam EA, quæ ex centro, eſt æqualis EB, & angulus EAF angulo EBF æqualis erit. (3) eſt autem, & AFE rectus æqualis recto BFE. duo igitur triangula EAF, EBF duos angulos duobus angulis æquales habent, unumque latus uni lateri æquale, EF commune, ſcilicet utriſque quod uni angulorum æqualium ſubtenditur. ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. (4) Atq; erit AF ipſi FB æqualis. Si igitur in circulo recta linea per centrum ducta rectam lineam quandam non ductam per centrum bifariam ſecet, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. quod ſi ipſam ſecet ad rectos angulos, & bifariam ſecabit. quod oportebat demonſtrare.



Theo-

(2) Diff. 10. primi. (3) 5. primi. (4) 26. primi.

Theorema 3. Propoſitio 4. Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent non ductæ per centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt.

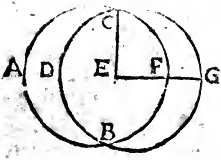


SIt circulus ABCD; & in ipſo duæ rectæ lineæ AC, BD ſe invicem ſecent in puncto E, non ductæ per centrum, Dico eas ſe ſe bifariam non ſecare. Si .n. fieri poteſt, ſecent ſe ſe bifariam, ita ut AE ſit æqualis EC, & BE ipſi ED: ſumaturq; centrum ABCD circuli, (1) quod ſit F, & EF jungatur. quoniam igitur recta linea FE per centrum ducta rectam lineam quandam AC non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad rectos angulos ipſam ſecabit. quare rectus eſt FEA angulus, rurſus quoniam recta linea FE rectam lineam quandam BD non ductam per centrum bifariam ſecat, & ad angulos rectos ipſam ſecabit. (2) rectus igitur angulus eſt FEB. oſtenſus autem eſt rectus, & FEA. ergo FEA angulus ipſi FEB æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. Non igitur AC, BD ſe ſe bifariam ſecant. quare ſi in circulo duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non ductæ per centrum, ſe ſe bifariam non ſecabunt, quod oſtendere oportebat.

Theo-

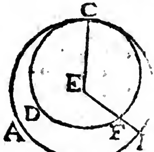
1) 1. hujus. (2) Ex antecedente.

Theorema 4. Propoſitio 5. Si duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum.



Duo enim circuli ſe invicem ſecent ABC, CDG in punctis B, C. Dico ipſorum idẽ centrum non eſſe. Si .n. fieri poteſt, ſit centrum E; jungaturque EC, & EFG utcumque ducatur; Et quoniam E centrum eſt circuli ABC erit CE ipſi EF æqualis. rurſus quoniam E centrum eſt CDG circuli, æqualis eſt CE ipſi EG. Sed oſtenſa eſt CE æqualis EF. ergo EF ipſi EG æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt. non igitur punctum E centrum eſt circulorum ABC, CDG. quare ſi duo circuli ſe invicem ſecent, non erit ipſorum idem centrum. Quod oſtendendum fuit.

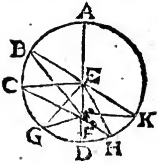
Theorema 5. Propoſitio 6. Si duo circuli ſe ſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit.



Duo .n. circuli ABC, CDF contingant ſe ſe intra in puncto C. Dico ipſorum non idem centrum. ſi enim fieri poteſt, ſit E, jungaturque EC, & EFB utcumque ducatur. quoniã igitur E centrum eſt circuli ABC æqualis eſt CE ipſi EB: rurſus quoniam E centrum eſt circuli CDF.

CDF, erit CE æqualis FE oſtenſa autem eſt CE æqualis EB, ergo, & EF ipſi EB eſt æqualis, minor majori quod fieri non poteſt. non igitur E punctum centrum eſt circulorum ABC, CDF. quare ſi duo circuli ſe ſe intra contingant, ipſorum idem centrum non erit; quod demonſtrare oportebat.

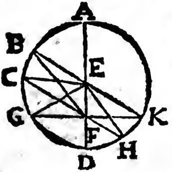
Theorema 6. Propoſitio 7. Si in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & ab eo in circulum cadant quædam rectæ lineæ; maxima quidem erit, in qua centrum, minima verò reliqua: aliarum autem propinquior ei, quæ per centrum tranſit, ſemper remotiore major eſt. at duæ tantum æquales ab eodem puncto in circulum cadent ad utraſque partes minimæ.



Sit circulus ABCD, cujus diameter AD; & in ipſa AD ſumatur aliquod pũctum F, quod non ſit centrum circuli. Sit autem circuli centrum E: & à puncto F intra circulum ABCD cadant quædam rectæ lineæ FB, FC, FG. Dico FA maximam eſſe, & FD minimam: aliarum verò FB quidem majorem quam FC, & FC majorem quam FG. jungantur.n. BE, CE, GE. Et quoniam omnis trianguli duo latera reliquo ſunt majora; (1) erunt BE, EF ma-

(1.) 20. primi.

majores quàm BF. eſt aũt AE æqualis EB. Ergo BE, EF ipſi AF ſunt æquales. major igitur eſt AF, quàm FB. rurſus quoniam BE eſt æqualis EC, communis autem FE, duæ BE, EF duabus CE, EF æquales ſunt. Sed BEF angulus major eſt angulo CEF. baſis igitur BF baſi FC eſt major (2) eadem ratione, & CF major eſt quam FG. rurſus quoniam GF, FE majores ſunt quàm EG, æqualis autem GE ipſi ED; erunt GF, FE majores quam ED. communis auferatur EF. Ergo reliqua GF major eſt quam reliqua FD. maxima igitur eſt FA, & FD minima: major verò BF quàm FC, & CF quàm FG major. dico, & à puncto F duas tantum rectas lineas cadere in circulum ABCD ad utraſque partes minimæ FD. conſtituatur .n. ad lineam EF, atque ad datum in ea punctum E angulo GEF æqualis angulus FEH. (3) & FH jungatur. quoniam igitur GE eſt æqualis EH, communis autem EF, duæ GE, EF duabus HE, EF æquales ſunt: & angulus GEF eſt æqualis angulo HEF. baſis igitur FG baſi FH æqualis erit. (4) dico à puncto F in circulum non cadere aliam ipſi FG æqualem. Si enim fieri poteſt, cadat FK. & quoniam FK eſt æqualis FG, eſtque ipſi FG æqualis FH; erit, & FK ipſi FH æqualis, videlicet propinquior ei, quæ per centrum tranſit, æqua-



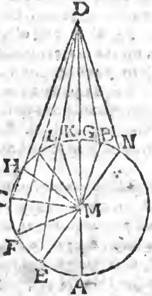
(2) 24. primi. (3) 23. primi. (4) 4. primi.

æqualis remotiori, quod fieri non poteſt. Vel hoc modo, jungatur EK, & quoniam GE ipſi EK eſt æqualis, communis autem FE, & baſis GF æqualis baſi FK; erit, & angulus GEF æqualis angulo KEF. Sed angulus GEF angulo HEF eſt æqualis: angulus igitur HEF ipſi KEF æqualis erit, minor majori, quod fieri non poteſt quare à puncto F in circulum non cadet alia recta linea æqualis ipſi GF. Ergo una tantum cadet. Si igitur in circuli diametro aliquod punctum ſumatur, quod non ſit centrum circuli, & reliqua, quæ ſequuntur. quod demonſtrare oportebat.

Theorema 7. Propoſitio 8. Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, atque ab eo ad circulum ducantur quadam recta linea, quarum una per centrum tranſeat, alia verò utcumque: earum quidem, qua in concavam circumferentiam cadunt, maxima eſt, qua per centrum tranſit; aliarum autem propinquior ei, qua per centrū, ſemper remotiore major eſt. at earum, qua in curvam circumferentiam cadunt minima eſt, qua inter punctum, & diametrum interjicitur; aliarum verò, quę propinquior minima ſemper remotiore eſt minor. dua autem tantum aquales à puncto in circulum cadunt ad utraſq; partes minima.

SIt circulus ABC, & extra circulum ſumatur aliquod punctum D: ab eo autem in circulum ducantur rectæ lineæ quædam DA, DE, DF, DC: ſitque DA per centrum. Dico earum quidem, quæ in concavam AEFC circumferentiam cadunt, maximam eſſe.

eſſe DA, quæ per centrum tranſit; & minimam, quæ inter punctum D, & diametrum AG interjicitur, videlicèt DG: majorem autem DE quam DF, & DF majorem quam DC: earum verò, quæ in curvam circumferentiā HLKG cadunt, quæ propinquior minimę DG ſemper remotiore eſſe minorem, hoc eſt DK minorem, quam DL, & DL minorem quam DH. Sumatur .n. centrum circuli ABC, quod ſit M, & jungantur ME, MF, MC, MH, ML, MK. & quoniam AM eſt æqualis ME, & communis apponatur MD. ergo AD eſt æqualis ipſi EM, MD. Sed EM, MD ſunt majores quàm ED. (1) ergo & AD quam ED eſt major. rurſus quoniam æqualis eſt ME ipſi MF communis apponatur MD. erunt EM, MD ipſi MF, MD æquales; & angulus EMD major eſt āgulo FMD. Baſis igitur ED baſi FD major erit. (2) Similiter demonſtrabimus, & FD majorem eſſe quam CD. ergo maxima eſt DA; major aũt DE quàm DF, & DF quàm DC major, Præterea quoniam MK, KD ſunt majores quam MD, & MG eſt æqualis MK; erit reliqua KD quàm reliqua GD major. quare GD minor quam KD, & id.



(1) 20. primi. (2) 24. primi.

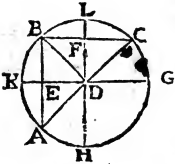
& idcircò GD, minima eſt; & quoniam trianguli MLD in uno latere MD, duæ rectæ lineæ MK, KD, intra conſtituuntur, erunt MK, KD minores ipſi ML LD, (3) quarum MK eſt æqualis ML, reliqua igitur DK minor eſt, quàm reliqua DL. Similiter oſtendemus & DL, quàm DH minorem eſſe. Ergo DG minima eſt; minor verò DK quam DL, & DL minor, quàm DH. Dico etiam duas tantùm æquales à puncto D, in circulum cadere ad utraſq; minimæ partes; conſtituatur ad rectam lineam MD, ad datumq; in ea punctum M, angulo KMD æqualis angulus DMB, (4) & DB jungantur; itaque quoniam MK eſt æqualis MB, communis autem MD, duę KM, MD duabus BM, MD æquales ſunt, altera alteri, & angulus KMD, æqualis angulo BMD, baſis igitur DK baſi DB eſt æqualis. (5) Dico à puncto D, nullã aliam ipſi DB æqualem in circulum cadere, ſi enim fieri poteſt, cadat DN, & quoniam DK eſt æqualis DN, & DK ipſi DB eſt æqualis; erit, & DB æqualis DN, propinquior ſcilicet minimæ æqualis remotiori, quod fieri non poſſe oſtenſum eſt. Vel & aliter. Iungatur MN, & quoniam æqualis eſt KM ipſi MN, communis autem MD; & baſis DK baſi DN æqualis erit, & propreреà angulus KMD æqualis angulo DMN. Sed KMD angulus eſt æqualis angulo BMD; angulus igitur BMD angulo NMD æqualis erit, minor majori quod fieri non poteſt. Quare, non plures quàm duæ rectæ lineæ à puncto D, in circulum ABC ad utraſque partes mi-

G ni-

(3) 21. primi. (4) 23. primi. (5) 4. primi.

nimæ GD cadent. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, & reliqua deinceps, quod oſtendere oportebat.

Theorema 8. Propoſitio 9. Si intra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales, punctum, quod ſumitur, circuli centrum erit.

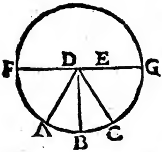


SIt circulus ABC, & intra ipſum ſumatur punctum D, à quo in circulum cadant plures, quam duæ rectæ lineæ æquales, videlicet DA, DB, DC. Dico punctum D, circuli ABC centrum eſſe. Iungantur enim AB, BC. ſeceturq; bifariam in punctis E, F: & junctæ ED, DF, ad puncta G, K, H, L producãtur, quoniam igitur AE eſt æqualis EB, communis autẽ ED, erunt duæ AE, ED, duabus BE, ED, æquales; & baſis DA, eſt æqualis baſi DB, angulus igitur AED, angulo BED æqualis erit, (1) & idcircò uterq; angulorum AED, BED eſt rectus. (2) Ergo GK bifariam ſecans AB, & ad angulos rectos ſecat. & quoniam ſi in circulo quędam recta linea, rectam lineã quandam bifariam, & ad angulos rectos ſecet, in ſecante eſt circuli centrum; (3) erit in GK centrum circuli ABC,

(1) 8. primi. (2) 13. primi. (3) Coroll. 1. hujus.

ABC. Eadem ratione,& in HL centrum eſt ABC circuli, & nullum aliud commune habent rectæ lineæ GK,HL, niſi punctum D.Ergo D circuli ABC eſt cētrum. Si igitur intra circulum ſumatur aliquod punctum, atq; ab eo in circulum cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales; punctum, quod ſumitur circuli centrum erit.

ALITER.

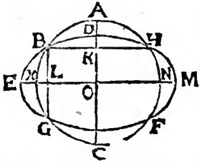


Sumatur enim intra circulum ABC punctum aliquod D: atque à puncto D, in circulum ABC cadant plures, quàm duæ rectæ lineæ æquales DA, DB, CD.Dico punctum D,quod ſumitur, circuli ABC eſſe centrum, non enim; ſed ſi fieri poteſt, ſit E, & juncta DE in FG producatur, ergo FG diameter eſt ABC circuli, itaq; quoniam in FG diametro circuli ABC ſumptum eſt aliquod punctum D, quod non eſt centrum circuli; maxima quidem erit DG, major autem DC, quàm D*B*, & DB, quàm DA major. (1) Sed, & æquales, quod fieri non poteſt, non igitur E centrum eſt circuli ABC. Similiter oſtendemus, neque aliud punctum centrum eſſe pręter ipſum D, ergo D circuli ABC, centrum erit, quod oportebat demonſtrare.

G 2 *Theo-*

(1 (7.hujus.

Theorema 9. Propoſitio 10. Circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat.

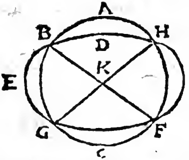


SI enim fieri poteſt, circulus ABC circulum DEF ſecet in pluribus pũctis, quã duobus, videlicet in B, G, H, F; & iũctę BG, BH bifariam ſecentur in K, L, atq; à pũctis K, L ipſis BG, BH [a]d rectos angulos ductæ KC, LM in puncta A, E producantur. Quoniam igitur in circulo ABC quædam recta linea AC rectam lineam quandam BH bifariã, & ad angulos rectos ſecat, in ipſa AC circuli ABC erit centrum. (1) Rurſus quoniam in eodem circulo ABC, quædam recta linea NX rectam lineam quandam BG bifariam ſecat, & ad rectos angulos; in ipſa NX centrum erit circuli, oſtenſum autem eſt, & in ipſa AC centrum eſſe, & in nullo alio puncto conveniunt inter ſe rectæ lineæ AC, NX, præter quàm in O. ergo O circuli ABC eſt centrum. Similiter oſtendemus punctum O, centrum eſse circuli DEF, ergo duorum circulorum ſe ſe ſecãtium ABC, DEF, idem erit centrum O, quod fieri non poteſt. (2) non igitur circulus circulum ſecat in pluribus punctis, quàm duobus.

ALI-

(1) Coroll. 1. hujus. (2) 5. hujus.

A L I T E R.



Circulus enim ABC rurſus circulum DEF ſecet in pluribus punctis, quàm duobus; nēpè in B, G, F, H. & circuli ABC centrum ſumatur, quod ſit K, & KB, KG, KF jungantur. quoniā igitur intra circulū DEF ſumptum eſt aliquod punctum K, à quo in circulum DEF incidant plures, quàm duæ rectæ lineę KB, KG, KF, erit punctum K, circuli DEF centrum: eſt autem, & circuli ABC centrum K, duorum igitur circulorum, qui ſe ſe ſecant, idem erit K, centrum, quod fieri non poteſt, quare circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis non ſecat, quod oportebat demonſtrare.

Theorema 10. *Propoſitio* 11. *Si duo circuli ſe ſe intus contingant, & ſumantur centra ipſorum; recta linea ipſorum centra conjungens, & producta in circulorum contactum cadet.*



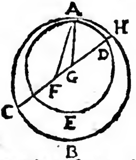
Duo enim circuli ABC, ADE, ſe ſe intus contingant in puncto A, & ſumatur circuli quidem ABC centrum, quod ſit F, circuli verò ADE centrum G. Dico rectam lineā à puncto G, ad F, ductam, ſi producatur in punctum A, cadere. Non enim: ſed ſi fieri po-

 teſt,

teſt, cadat vt FGDH. Et AF, AG, jungantur. Itaque quoniam AG, GF, majores ſunt, quàm FA, (1) hoc eſt quàm FH, communis auferatur FG, reliqua igitur AG major eſt, quàm reliqua GH. Sed AG eſt ęqualis GD. Ergo GD ipſa GH, eſt major, minor majore quod fieri non poteſt. Non igitur à puncto F, ad G, ducta recta linea extra contactum A cadet, quare in ipſum cadat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſe ſe intus contingant; recta linea ipſorum centra conjungens, ſi producatur in contactum circulorum cadet, quod oportebat demonſtrare,

(1) 20. primi.

ALITER.



SEd cadat, ut GFC, & producatur in directum CFG, ad punctum H: junganturque AG, AF. Quoniã igitur AG, GF, majores ſunt, quàm AF, (1) & AF, eſt æqualis FC, hoc eſt ipſi FH, communis auferatur FG, reliqua igitur AG, reliqua GH eſt major: hoc eſt DG major ipſa GH, minor majore, quod fieri non poteſt. Similiter, & ſi extra circulum paruum ſit centrum majoris circuli, idem ſequi abſurdum oſtendemus.

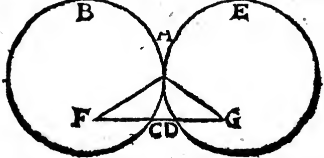
Theo-

(1) 20. primi.

Digitized by Google

Theorema 11. *Propoſitio* 12. *Si duo circuli ſe ſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit.*

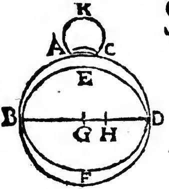
Duo enim circuli ABC, ADE, ſe ſe extra contingant in puncto A; & ſumatur circuli quidem



ABC centrum, quod ſit F: circuli verò ADE centrum G. Dico rectam lineam, quæ à puncto F, ad G, ducitur, per contactum A, tranſire. Non enim: ſed ſi fieri poteſt, cadat, ut FCDG: & FA, AG, jungantur. Quoniam igitur F, centrũ eſt circuli ABC, erit AF æqualis FC. Rurſus quoniam G, centrum eſt ADE circuli, erit AG, ipſi GD æqualis, oſtenſa eſt autem, & AF æqualis FC, ſunt igitur FA, AG, ipſis FC, DG, æquales. Ergo tota FG, major eſt, quàm FA, AG. Sed & minor, (1) quod fieri non poteſt. Non igitur à puncto F, ad G, ducta recta linea per contactum A, non tranſibit, quare per ipſum tranſeat neceſſe eſt. Si igitur duo circuli ſe ſe extra contingant, recta linea ipſorum centra conjungens per contactum tranſibit, quod oportebat demonſtrare.

(1) 20. primi.

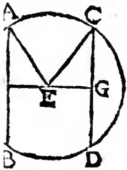
Theorema 12. Propoſitio 13. Circulus circulum non contingit in pluribus punctis, quàm uno, ſivè intus ſivè extra contingat.



SI enim fieri poteſt, circulus ABDC circulum EBFD cõtingat primum intus in pluribus punctis, quàm uno, videlicet in B, D: & ſumatur circuli quidem ABDC cẽtrum G; circuli verò EBFD centrũ H, ergo recta linea, quę à puncto G, ad H, ducitur, in pũcta BD cadet. cadat, ut BGHD, & quoniam G, centrum eſt circuli ABDE, erit BG ipſi GD æqualis, major igitur eſt BG, quàm HD: & BH, quàm HD, multo major. Rurſus quoniã H, centrum eſt EBFD circuli, ęqualis eſt BH ipſi HD, atqui oſtenſa eſt ipſa multo major, quòd fieri non poteſt, non igitur circulus circulum intus contingit in pluribus punctis, quàm uno. Dico etiam neque extra contingere. Si enim fieri poteſt, circulus ACK circulum ABDC extra cõtingat in pluribus punctis, quàm uno, videlicet in A, C, & AC, jungatur. Itaq; quoniam in circumferentia utrorumque circulorum ABDC, ACK, ſumpta ſunt duo quævis puncta A, C; recta linea, quæ ipſa conjungit intra utrumque ipſorum cadet. Sed intra circulum quidẽ ABDC cadit, extra circulum verò ACK, quod eſt abſurdum, non igi-

ır circulus circulum extra contingit in pluribus ɛtis, quàm uno: oſtenſum autem eſt neque intus ingere, circulus igitur circulum non contingit luribus punɛtis; quàm uno, ſivè intus, ſivè extra ingat, quod oportebat demonſtrare.

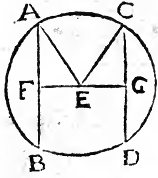
rema 13. *Propoſitio* 14. *In circulo æquales rectæ lineæ jualiter à centro diſtant; & quæ æqualiter à centro ſtant, inter ſe ſunt æquales.*



SIt circulus ABDC, & in ipſo æquales rectę lineæ AB, CD. dico eas à centro ęqualiter diſtare. Sumatur enim circuli ABDC centrum, quod ſit E, & ab ipſo ad AB, CD, perpendiculares ducantur EF, EG, & AE, EC, jungantur. Quoniam igitur recta linea quædam per centrum ducta EF, rectam li-ı quandam AB, non ductam per centrum ad re-angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit. (1) re AF, eſt æqualis FB, ideòque AB, ipſius AF, a. eadem ratione, & CD, dupla eſt CG, atque Bipſi CD æqualis, æqualis igitur, & AF ipſi CG. ıoniam AE, eſt æqualis EC, erit, & quadratum E, quadrato ex EC æquale. Sed quadrato quidē E, æqualia ſunt ex AF, FE, quadrata (2) rectus angulus eſt ad F: quadrato autem ex EC æqualia

.) 3. hujus. (2) 47. primi.

lia ſunt quadrata ex EG, GC, cum angulus ad G,ſit rectus.Quadrata igitur ex AF, FE,æqualia ſunt quadratis ex CG, GE, quorum quadratum ex AF quadrato ex CG eſt æquale,etenim ęqualis eſt AF ipſi CG,reliquum igitur,quod fit ex FE , quadratum, æquale eſt reliquo, quod ex EG ; ac propterea FE ipſi EGeſt ęqualis:in circulo autem æqualiter

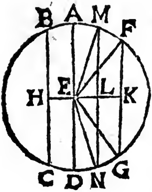


diſtare à centro rectæ lineæ dicũtur,quando à centro ad ipſas perpendiculares ductæ æquales ſunt , ergo AB , CD , à centro æqualiter diſtant ; ſed AB , CD , æqualiter diſtent à centro, hoc eſt æqualis ſit FE ipſi EG, dico AB , ipſi CD , æqualem eſſe. Iiſdem enim conſtructis, ſimiliter oſtendemus AB, duplam eſſe ipſius AF , & CD , duplam ipſius CG. Et quoniam æqualis eſt AE, ipſi EC, erit, & ex AE, quadratum quadrato ex EC , æquale. Sed quadrato quidem ex AE,æqualia ſunt quadrata ex EF,FA: quadrato autẽ ex EC, æqualia quadrata ex EG , GC , quadrata igitur ex EF , FA, quadratis ex EG , GC, æqualia ſunt, quorum quadratum ex EG , æquale eſt quadrato ex EF; eſt enim EG,ipſi EF æqualis,reliquum igitur ex AF quadratum æquale eſt reliquo ex CG , ergo AF ipſi CG eſt æqualis, atque eſt AB, ipſius AF dupla ,& CD,dupla ipſius CG.In circulo igitur æquales rectæ lineæ æqualiter à centro diſtant , & quæ æqualiter à centro diſtant,inter ſe ſunt æquales.Quod oportebat demonſtrare.

Theo-

Digitized by Google

Theorema 14. Propoſitio 15. In circulo maxima quidem eſt diameter; aliarum verò ſemper propinquior ei, quæ per centrum tranſit, remotiore major eſt.



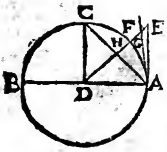
SIt circulus ABCD, cujus diameter AD, centrum E, & propinquior quidē diametro AD, ſit BC, remotior verò FG. dico AD maximam eſſe. & BC majorem, quàm FG. Ducantur enim à centro ad BC. FG, perpendiculares EH, EK. & quoniam BC propinquior eſt ei, quæ per centrū tranſit, remotior autem FG; erit EK, quàm EH major. ponatur ipſi EH, æqualis EL. & per L, ipſi EK. ad rectos angulos ducta LM in N, producatur, & jungantur EM, EN, EF, EG. Quoniam igitur EH, eſt æqualis EL, erit, & BC ipſi MN, æqualis, (1) rurſus, quoniam æqualis eſt AE, ipſi EM, & DE. ipſi EN, erit, & AD, ipſis ME. EN, æqualis. Sed ME. EN, majores ſunt, quàm MN, ergo, & AD, major eſt, quàm MN, & MN, eſt æqualis BC, eſt igitur AD, quā BC, major. Quòd cum duæ EM, EN, duabus FE, EG, æquales ſint, anguluſque MEN, major angulo FEG, & baſis MN, baſi FG major erit, (2) oſtenſa autem eſt MN, æqualis BC, ergo, & BC, quàm FG, eſt major.

Ma-

(1) Ex antecedente. (2) 24. primi.

Maxima igitur eſt AD diameter, & BC major,quàm FG. Quare in circulo maxima eſt diameter, aliarum verò ſemper propinquior ei,quę per centrum tranſit remotiore eſt major. Quod demoſtrare oportebat.

Theorema 15. Propoſitio 16. Quæ diametro circuli ad rectos angulos ab extremitate ducitur,cadit extra circulum: & in locum,qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur,altera recta linea non cadet: & ſemicirculi angulus omni angulo acuto rectilineo major eſt; reliquus autem minor.



Sit circulus ABC, circa centrum D, & diametrum AB, dico rectam lineam, quæ à puncto A,ipſi AB,ad rectos angulos ducitur extra circulum cadere. Non enim, ſed, ſi fieri poteſt, cadat intus, vt AC, & DC jungatur. Itaque quoniã æqualis eſt DA,ipſi DC,erit,& angulus DAC angulo ACD æqualis, (1) rectus autem eſt DAC, ergo, & ACD eſt rectus; ac propterea anguli DAC, ACD, duobus rectis æquales ſunt, quod fieri nõ poteſt, (2) non igitur à pũcto A ipſi BA ad rectos angulos ducta cadet intra circulum.Similiter oſtendemus,neque in circumferentiam cadere, extra igitur cadat neceſſe eſt. cadat, ut AE, dico in locum, qui inter rectam li-

(1) 5.primi. (2) 17.primi.

lineam AE,& circumferentiam CHA interjicitur, alteram rectam lineam nō cadere. Si enim fieri poteſt, cadat, ut FA, & à puncto D, ad FA, perpendicularis ducatur DG; & quoniam rectus eſt angulus AGD, minor autem recto DAG, erit DA, quàm DG major, (3) æqualis autem eſt DA, ipſi DH, major igitur eſt DH ipſa DG, minor majore, quod fieri non poteſt. Non igitur in locum, qui inter rectam lineam, & circumferentiam interjicitur, altera recta linea cadet. Dico prætereà angulum ſemicirculi, qui recta linea BA, & circumferentia CHA continetur, omni angulo acuto rectilineo majorem eſſe; reliquum verò contentum circumferentia CHA, & recta linea AE, omni angulo acuto rectilineo eſſe minorem. Si enim eſt aliquis angulus rectilineus major quidem contento recta linea BA,& CHA circumferentia, minor autem contento CHA circumferentia, & recta linea AE, in locum, qui inter circumferentiā CHA, & rectam lineam AE interjicitur, cadet aliqua recta linea, quæ faciet angulum majorē quidem contento recta linea BA, & CHA circumferentia, qui ſcilicet rectis lineis continetur, minorem verò contento circumferentia CHA, & AE recta linea: non cadit autem, non igitur erit angulus acutus, qui rectis lineis continetur, major angulo contento recta linea BA, & CHA, circumferentia, neque minor contento circumferentiā CHA, & AE, recta linea.

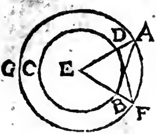
CO-

(3) 19. primi.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt rectam lineam, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, circulum contingere, & rectam lineam contingere circulum in uno tantum puncto, quoniam quæ occurrit in duobus punctis intra ipſum cadit, ut oſtenſum eſt.

Problema 2. Propoſitio 17. A dato puncto rectam lineam ducere, quæ datum circulum contingat.



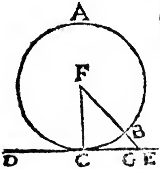
Sit datum quidem punctũ A, datus autem circulus BCD, oportet à puncto A, rectam lineam ducere, quæ circulũ BCD contingat. Sumatur enim centrum circuli E; & iuncta AE, centro quidem E, intervallo autem EA, circulus AFG, deſcribatur: & à puncto D, ipſi EA, ad rectos angulos ducatur DF: junganturque EBF, AB. Dico à puncto A, ductam eſſe AB, quæ circulum BCD, contingit. Quoniam enim E, centrum eſt circulorum BCD, AFG, erit EA, æqualis EF, & ED, ipſi EB. Duæ igitur AE, EB, duabus FE, ED, æquales ſunt, & angulum communem continent, qui eſt ad E, ergo baſis DF, baſi AB, eſt æqualis; triangulumque DEF, æquale triangulo EBA, & reliqui anguli, reliquis angulis, (1) æqualis igitur eſt angulus EBA, angulo EDF, & EDF, rectus eſt, quare, & rectus EBA: atque eſt EB, ex centro,

(1) 4. primi.

tro, quæ autem diametro circuli ab extremitate ad rectos angulos ducitur, circulū contingit, (2) ergo AB, contingit circulum. A dato igitur puncto A, ducta eſt recta linea AB, quæ circulum BCD contingit, quod facere oportebat.

(2) Ex antecedente.

Theorema 16. *Propoſitio* 18. *Si circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad cōtingentem perpendicularis erit.*

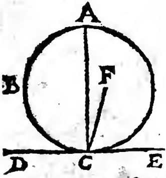


Circulum enim ABC, contingat quædam recta linea DE, in puncto C: & circuli ABC, centrum ſumatur F, à quo ad C, ducatur FC. Dico FC ad ipſam DE, perpendicularem eſſe. Si enim non ita ſit, ducatur à puncto F, ad DE, perpendicularis FG. Quoniam igitur angulus FGC, rectus eſt, erit GCF acutus, (1) ac propterea FGC, angulus major angulo FCG, majorem autem angulum majus latus ſubtendit, (2) major igitur eſt FC, quàm FG, æqualis autem FC, ipſi FB, ergo FB, ipſa FG, eſt major, minor majore, quod fieri non poteſt, non igitur FG, eſt perpendicularis ad DE. Similiter oſtendemus neq; aliam quampiam

(1) 17. primi. (2) 19. primi.

piam eſſe præter ipſam FC, ergo FC, ad DE, eſt perpendicularis. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à centro autem in contactum recta linea ducatur, ea ad contingentem perpendicularis erit, quod oportebat demonſtrare.

Theorema 17. Propoſitio 19. Si circulum contingat, quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur: in ea circuli centrum erit.



Circulum enim ABC cōtingat quædam recta linea DE, in C, & à puncto C, ipſi DE, ad rectos angulos ducatur CA. Dico in ipſa AC, circuli centrum eſſe. Non enim: ſed, ſi fieri poteſt, ſit F, centrū, & jungatur CF. Quoniam igitur circulum ABC, contingit quædam recta linea DE, & à centro ad contactum, ducta eſt FC; erit FC ad ipſam DE, perpendicularis; rectus igitur angulus eſt FCE; eſt autē, & ACE rectus, ergo FCE, angulus eſt æqualis angulo ACE, minor majori, quòd fieri non poteſt. Non igitur F, centrum eſt ABC circuli. Similiter oſtendemus neque aliud aliquod eſſe, præterquàm in ipſa AC. Quare ſi circulum contingat, quædam recta linea, à contactu autem ad rectos angulos contingenti recta linea ducatur; in ea circuli erit centrum; quod demonſtrare oportebat.

Theo-

Theorema 18. Propoſitio 20. In circulo angulus, qui ad centrum, duplus eſt ejus, qui ad circumferentiam, quādo circumferentiam eandem pro baſi habeant.

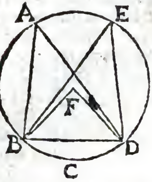


Sit circulus ABC, ad cujus cētrum quidem angulus ſit BEC, ad circumferentiam verò BAC, & eandem circumferentiam BC, pro baſi habeant; dico BEC angulum, anguli BAC duplum eſſe. Iungatur enim AE, & ad F, producatur. Itaq; quoniam EA, eſt æqualis EB, erit, & angulus EAB angulo EBA æqualis; (1) anguli igitur EAB, EBA, dupli sūt ipſius anguli EAB, ſed angulus BEF eſt æqualis angulis EAB, EBA; (2) ergo BEF angulus, anguli EAB eſt duplus. Eadem ratione, & angulus FEC duplus eſt ipſius EAC; totus igitur BEC, totius BAC, duplus erit. Rurſus inflectatur, & ſit alter angulus BDC, junctaque DE, ad G producatur. Similiter oſtendemus angulum GEC, anguli EDC, duplum eſſe; quorum GEB duplus eſt ipſius EDB. ergo reliquus BEC, reliqui BDC eſt duplus. In circulo igitur angulus, qui ad centrum duplus eſt ejus, qui ad circumferentiam, quando circumferentiam eandem pro baſi habeant, quod oportebat demonſtrare.

H *Theo-*

(1) 5. primi. (2) 32. primi.

Theorema 19. Propoſitio 21. In circulo, qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt.



SIt circulus ABCDE, & in eadem portione BAED, anguli ſint BAD, BED. Dico eos inter ſe æquales eſſe. Sumatur enim circuli ABCDE centrum, quod ſit F: junganturque BF, FD; & quoniam angulus quidem BFD, eſt ad centrum, angulus verò BAD ad circumferentiã, & circumferentiam eandem pro baſi habent BCD; erit BFD angulus, anguli BAD duplus. Eadem ratione angulus BFD, duplus eſt etiã anguli BED. Ergo angulus BAD, angulo BED, æqualis erit. In circulo igitur, qui in eadem portione ſunt anguli, inter ſe æquales ſunt. quod oportebat demonſtrare

Theorema 20. Propoſitio 22. Quadrilaterorum, quæ in circulis deſcribũtur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt.

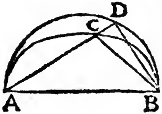


SIt circulus ABCD, & in ipſo quadrilaterum ABCD. Dico angulos ipſius oppoſitos duobus rectis æquales eſſe. Iungãtur AC, BD. Quoniam igitur omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſunt æquales, (1) erunt

(1) 32. primi.

erunt trianguli ABC, tres anguli CAB, ABC, BCA, æquales duobus rectis. Sed angulus CAB, eſt æqualis angulo BDC, in eadem enim ſunt portione BADC; & angulus ACB, æqualis ipſi ADB, quod ſint in eadē ADCB portione; totus igitur angulus ADC, angulis BAC, ACB, eſt æqualis; communis apponatur ABC, angulus duobus angulis, qui ſunt ad A, & C, & ſeorſum uni angulo, qui eſt ad D; erūt anguli ABC, BAC, ACB, angulis ABC, ADC, æquales. Sed ABC, BAC, ACB, sūt ęquales duobus rectis; ergo, & anguli ABC, ADC, duobus rectis æquales erunt. Similiter oſtendemus angulos quoque BAD, DCB, duobus rectis eſſe æquales. Quadrilaterorum igitur, quæ in circulis deſcribūtur, anguli oppoſiti duobus rectis æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 21. Propoſitio 23. In eadem recta linea duæ circulorum portiones ſimiles, & inæquales ex eadem parte non conſtituentur.



SI enim fieri poteſt, in eadem recta linea AB, duæ circulorū portiones ſimiles, & inæquales cōſtituantur ex eadem parte ACB, ADB; ducaturque ACD, & CB, BD jungantur. Itaque quoniam portio ACB, ſimilis eſt portioni ADB, ſimiles autem circulorum portiones ſunt, quæ angulos ſuſcipiunt æquales; (1)

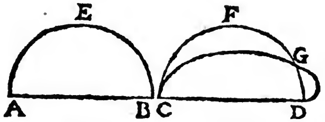
 erit

(1) Diff. 11. hujus.

erit ACB angulus æqualis angulo ADB, exterior interiori, quod fieri non poteſt. Non igitur in eadem recta linea, duæ circulorum portiones ſimiles, inæquales ex eadem parte conſtituentur. Quod demonſtrare oportebat.

Theorema 22. Propoſitio 24. In æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones inter ſe æquales ſunt.

SInt enim in æqualibus rectis lineis AB,CD, ſimiles circulorum portiones AEB, CFD. Dico portionem AEB, portioni CFD æqualem eſſe; congruē-

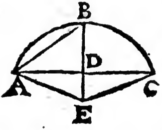


te enim AEB portione, portioni CFD, & poſito puncto quidem A, in C, recta verò linea AB, in CD; cōgruet, & B, punctum puncto D, propterea quod AB, ipſi CD, ſit æqualis; congruente autem recta linea AB rectę CD; congruet, & AEB portio, portioni CFD. Si enim AB congruet ipſi CD, portio autem AEB, portioni CFD, non congruet, ſed permutabitur, ut CGD, circulus circulum in pluribus, quàm duobus punctis ſecabit; etenim circulus CGD, circulum CFD ſecat in pluribus punctis, quàm duobus, videlicet in punctis C,G,D, quod rurſus fieri non poteſt.

Non

Non igitur congruente recta linea AB, rectæ CD, nõ congruet, & ACB portio, portioni CFD; quare congruet, & ipſi æqualis erit. In æqualibus igitur rectis lineis ſimiles circulorum portiones inter ſe æquales ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

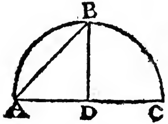
Problema 3. Propoſitio 25. Circuli portione data deſcribere circulum, cujus ea portio eſt.

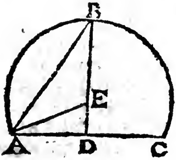


SIt data circuli portio ABC, itaque oportet portionis ABC, deſcribere circulum cujus eſt portio. Secetur AC, bifariam in D: & à puncto D, ipſi AC, ad rectos angulos ducatur DB, & AB jungatur; vel igitur angulus ABD, major eſt angulo BAD, vel minor, vel ipſi æqualis. Sit primùm major, & ad rectam lineam BA, atque ad datum in ea punctum A, conſtituatur angulus BAE, æqualis angulo ABD; (1) & BD, ad E, producatur, jungaturque EC. Quoniam igitur angulus ABE, eſt æqualis angulo BAE, erit, & BE recta linea ipſi EA æqualis; (2) & quoniã AD, eſt æqualis DC, communis autem DE, duæ AD, DE, duabus CD, DE, ęquales ſunt, altera alteri; & angulus ADE, æqualis angulo CDE, rectus enim uterque eſt; ergo, & baſis AE, baſi EC, eſt æqualis. Sed oſtẽſa eſt AE, æqualis EB; quare, & BE, ipſi EC, eſt æqualis, ac propterea tres rectæ lineæ AE, EB, EC,

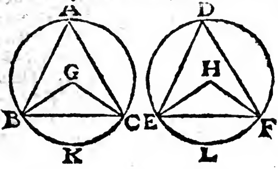
(1) 23. primi. (2) 6. primi.

inter ſe æquales ſunt; centro igitur E, intervallo autem una ipſarum AE, EB, EC, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & circulus deſcriptus erit. Quare circuli portione data deſcriptus eſt circulus; cujus ea portio eſt. Sed, & illud conſtat, portionem ABC, ſemicirculo minorem eſſe; propterea quod centrum ipſius extra cadit. Similiter, & ſi angulus ABD, ſit æqualis angulo BAD, facta AD, æquali utrique ipſarum BD, DC, erunt tres rectæ lineę AD, DB, DC, inter ſe æquales, atque erit D, circuli deſcripti cẽtrum, & portio ABC, ſemicirculus. Si verò angulus ABD, minor ſit angulo BAD, conſtituatur ad rectam lineam BA, & ad punctum in ea datum A, angulo ABD, æqualis angulus BAE, intra portionem ABC; erit centrũ in ipſa DB, atque erit ABC, portio ſemicirculo major. Circuli igitur portione data deſcriptus eſt circulus, cujus portio eſt; quod facere oportebat.





Theorema 23. Propoſitio 26. In æqualibus circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentijs, ſivè ad centra, ſivè ad circumferentias inſiſtant.



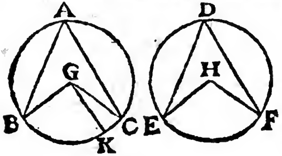
Sint æquales circuli ABC, DEF, & in ipſis æquales anguli ad cētra quidem BGC, EHF, ad circūferētias verò BAC, EDF. Dico BKC circumferentiam, circumferentiæ ELF, æqualem eſſe. Iungantur enim BC, EF. Et quoniam æquales ſunt ABC, DEF circuli, erunt & quæ ex centris æquales; duæ igitur BG, GC, duabus EH, HF, æquales ſunt: & angulus ad G, æqualis angulo ad H; ergo, & baſis BC, baſi EF, eſt æqualis. (1) Rurſus quoniam æqualis eſt angulus ad A, angulo ad D, portio BAC, ſimilis erit portioni EDF. (2) & ſunt in æqualibus rectis lineis BC, EF. Quæ autem in æqualibus rectis lineis ſimiles ſunt circulorum portiones, inter ſe æquales ſunt; (3) portio igitur BAC, portioni EDF, eſt æqualis. Sed, & totus ABC, circulus æqualis eſt toti DEF; ergo, & reliqua circumferentia BKC, reliqua ELF, æqualis erit. In æqualibus igitur circulis æquales anguli æqualibus inſiſtunt circumferentijs, ſivè ad centra, ſivè ad cir-

H 4 cum-

(1) 4. primi. (2) Diff. 11. hujus. (3) 24. hujus.

cumferentias inſiſtant;quod oportebat demonſtrare.

Theorema 24. Propoſitio. 27. In æqualibus circulis anguli, qui æqualibus inſiſtunt circumferētiis, inter ſe æquales ſunt, ſivè ad centra, ſivè ad circūferentias inſiſtant.



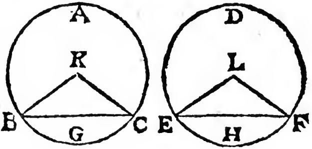
IN æqualibus enim circulis ABC, DEF, æqualibus circūferētiis BC, EF, inſiſtant anguli ad centra quidē BGC, EHF, ad circūferentias verò BAC, EDF. Dico angulum BGC, angulo EHF, & angulum BAC, angulo EDF, æqualem eſſe. Si quidem igitur angulus BGC, æqualis ſit angulo EHF; manifeſtum eſt angulum quoque BAC, angulo EDF, eſſe æqualem. Sin minus, unus ipſorum eſt major; ſit major BGC, & conſtituatur ad rectam lineam BG, & ad punctum in ipſa G, angulo EHF, æqualis angulus BGK; (1) æquales autem anguli æqualibus inſiſtunt circumferentijs, quando ad cētra fuerint. (2) Ergo circumferentia BK, æqualis eſt circumferentiæ EF. Sed circūferentia EF, æqualis eſt ipſi BC; ergo, & BK, ipſi BC, eſt æqualis, minor majori, quod fieri non poteſt. Non igitur inæqualis eſt angulus BGC, angulo EHF; ergo eſt æqualis.

(1) 23. primi. (2) Ex antecedente.

lis. Atque eſt anguli quidem BGC dimidius angulus qui ad A; anguli verò EHF, dimidius qui ad D; angulus igitur qui ad A, angulo qui ad D, eſt æqualis. In æqualibus igitur circulis anguli, qui æqualibus inſiſtunt circumferentijs inter ſe æquales ſunt, ſivè ad centra, ſivè ad circumferentias inſiſtant; quod oportebat demonſtrare.

Theorema 25. Propoſitio 28. In æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori.

Sint æquales circuli ABC, DEF; & in ipſis æquales rectæ lineæ BC,EF,quę circumferentias,quidem BAC, EDF, majores auferant, circumferentias



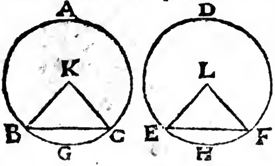
verò BGC, EHF, minores. Dico circumferentiam BAC majorem, majori circumferentiæ EDF, & minorem circumferentiam BGC, minori EHF æqualē eſſe. Sumãtur enim centra circulorum K,L, (1) junganturque BK,KC,EL,LF. Et quoniam circuli æquales ſunt, erunt, & quæ ex centris æquales. (2) duæ igi-

(1) 1.hujus. (2) Diff.1.hujus.

igitur BK, KC, ſunt æquales duabus EL, LF: & baſis BC, æqualis eſt baſi EF. Ergo angulus BKC, angulo ELF eſt æqualis; (3) æquales autem anguli æqualibus inſiſtunt circumferentijs, (4) quando ad centra fuerint; quare circumferentia BGC, æqualis eſt circumferentiæ EHF. Sed, & totus ABC, circulus, toti DEF eſt æqualis; reliqua igitur circumferentia BAC, reliqua EDF, æqualis erit. Ergo in æqualibus circulis æquales rectæ lineæ circumferencias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori, quod demonſtrare oportebat.

(3) 8.primi. (4) 26.hujus.

Theorema 26. Propoſitio 29. In æqualibus circulis, æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt.



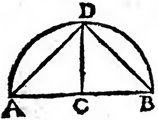
Sint æquales circuli ABC, DEF: & in ipſis æquales aſſumantur circumferentiæ BGC, EHF, & BC, EF, jungantur. Dico rectam lineam BC, rectæ EF, æqualem eſſe. Sumantur enim centra circulorum K, L, (1) & jungantur BK, KC, EL, LF; quoniam igitur circumfe-

(1) 1.hujus.

ferentia BGC eſt æqualis circumferentiæ EHF, erit, & angulus BKC, angulo ELF, æqualis. (2) Et quoniam circuli ABC, DEF, ſunt æquales, & quæ ex cẽtris æquales erunt; (3) duæ igitur BK, KC, ſunt æquales duabus EL, LF; & æquales angulos continent; quare baſis BC, baſi EF, eſt æqualis (4) In æqualibus igitur circulis æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt; quod oportebat demonſtrare.

(2) 26.hujus. (3) Diff.1.hujus. (4) 4.primi.

Problema 4. Propoſitio 30. Datam circumferentiam bifariam ſecare.



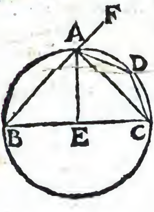
Sit data circumferentia ADB; oportet ADB, circumferentiã bifariam ſecare. Iungatur AB, & in C, bifariam ſecetur: (1) à puncto autem C, ipſi AB, ad rectos angulos ducatur CD; & jungantur AD, DB. Quoniam igitur AC, eſt æqualis CB, cõmunis autem CD, duæ AC, CD, duabus BC, CD, æquales ſunt: & angulus ACD, ęqualis angulo BCD, rectus enim uterque eſt: ergo baſis AD, baſi DB, eſt æqualis; (2) æquales autem rectæ lineæ circumferentias æquales auferunt, majorem quidem majori, minorem verò minori; (3) & eſt utraque ipſarum AD,

(1) 10.primi. (2) 4.primi. (3) 28.hujus.

Digitized by Google

AD, DB, circumferentiarum ſemicirculo minor; quare circũferentia AD, circumferentiæ DB, æqualis erit; data igitur circumferentia bifariam ſecta eſt. Quod facere oportebat.

Theorema 27. Propoſitio 31. In circulo angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui verò in majori portione, minor eſt recto, & qui in minori, major recto; & inſuper majoris quidem portionis angulus recto major eſt, minoris verò portionis angulus recto minor.



Sit circulus ABCD, cujus diameter BC, centrum autem E; & jungantur BA, AC, AD, DC. Dico angulum quidem, qui eſt in ſemicirculo BAC, rectum eſſe, qui verò in portione ABC, majore ſemicirculo, videlicet angulum ABC, minorem eſſe recto, & qui in portione ADC, minore ſemicirculo, hoc eſt angulũ ADC, recto majorem; jungatur AE, & BA ad F producatur. Itaque quoniam BE, eſt æqualis EA, erit, & angulus EAB, angulo EBA, æqualis. (1) Rurſus quoniam AE, eſt æqualis EC, & angulus ACE, angulo CAE, æqualis erit; totus igitur angulus BAC, eſt æqualis duobus ABC, ACB, angulis; eſt autem, & angulus FAC extra triangulũ ABC, duo-

(1) 5. primi.

duobus ABC, ACB, æqualis; (2) angulus igitur BAC, eſt æqualis angulo FAC; ac propterea uterque ipſorum rectus. (3) Quare in ſemicirculo BAC, angulus BAC, rectus eſt; & quoniam trianguli ABC duo anguli ABC, *B*AC, duobus rectis ſunt minores. (4) rectus autem *B*AC: erit A*B*C, angulus recto minor, atque eſt in portione A*B*C, majore ſemicirculo. Quod cum in circulo quadrilaterum ſit A*B*CD, quadrilaterorum verò, qui in circulis deſcribuntur, anguli oppoſiti duobus rectis ſint æquales: (5) erunt A*B*C, ADC, anguli æquales duobus rectis; & angulus A*B*C, minor eſt recto; reliquus igitur ADC, recto major erit, atque eſt in portione ADC, minore ſemicirculo. Dico prætereà majoris portionis angulum, qui continetur A*B*C circumferentia, & recta linea AC, recto majorem eſſe; angulum verò minoris portionis contentum circumferentia ADC, & recta linea AC, recto minorem; quod quidem perſpicuè apparet. Quoniam enim angulus, qui rectis lineis *B*A, AC, cōtinetur, rectus eſt, erit, & contentus A*B*C, circumferentia, & recta linea AC, recto major. Rurſus quoniam angulus contentus rectis lineis CA, AF, rectus eſt, erit qui cōtinetur recta linea CA, & ADC circumferentia, minor recto. In circulo igitur angulus, qui in ſemicirculo rectus eſt, qui verò in majori portione minor eſt recto, & qui in minori major recto; & inſuper majoris quidem portionis angulus recto major eſt: minoris verò recto minor. Quod demonſtrare oportebat.

AL I-

(2) 32. primi. (3) 13. primi. (4) 17. primi. (5) 22. huius.

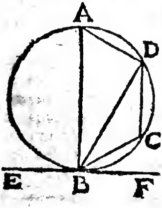
ALITER.

DEmonſtrabitur angulum *B*AC, rectum eſſe. Quoniam enim angulus AEC, duplus eſt anguli *B*AE, etenim duobus interioribus, & oppoſitis eſt æqualis: eſt autem, & AE*B*, duplus ipſius EAC: anguli AE*B*, AEC, anguli *B*AC, dupli erunt. Sed, & AE*B*, AEC, anguli duobus rectis ſunt æquales; ergo angulus *B*AC, rectus eſt; quod demõſtrare oportebat.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi trianguli unus angulus ſit ęqualis duobus, eum rectum eſſe; propterea quòd, & qui deinceps eſt, iiſdem eſt æqualis; quando autẽ anguli deinceps ſunt æquales, neceſſario recti ſunt.

Theorema 28. Propoſitio 32. Si circulum contingat quædam recta linea, a contactu autem in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli, quos ad contingentem facit, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt.



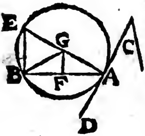
CIrculum enim A*B*CD, contingat quædam recta linea EF, in *B*, & à puncto *B*, ad circulum A*B*CD, ducatur recta linea *B*D, ipſum utcumque ſecans Dico angulos, quos *B*D, cum EF contingente facit, ęquales eſſe iis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtũt, hoc eſt angulum F*B*D, eſſe æqualem angulo, qui cõſtituitur

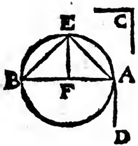
tur in DA*B* portione, videlicet ipſi DA*B*; angulum verò EBD, æqualem angulo DC*B*, qui in portione DC*B*, conſtituitur. Ducatur enim à puncto *B*, ipſi EF, ad rectos angulos *BA*: (1) & in circumferentia *BD*, ſumatur quodvis punctum C; junganturque AD, DC, C*B*. Quoniam igitur circulum A*B*CD, contingit quædam recta linea EF, in puncto *B*: & à contactu *B*, ad rectos angulos contingenti ducta eſt *BA*; erit in ipſa *BA*, centrum A*B*CD, circuli, (2) quare *BA*, ejuſdem circuli diameter eſt, & angulus AD*B*, in ſemicirculo eſt rectus; (3) reliqui igitur anguli *B*AD, A*B*D, uni recto æquales ſunt. (4) Sed, & A*B*F, eſt rectus; ergo angulus A*B*F, æqualis eſt angulis *B*AD, A*B*D; communis auferatur A*B*D; reliquus igitur D*B*F ei, qui in alterna circuli portione conſiſtit, videlicet angulo *B*AD, eſt æqualis. Et quoniam in circulo quadrilaterum eſt A*B*CD, & anguli ejus oppoſiti æquales ſunt duobus rectis; (5) erunt DBF, D*B*E, anguli angulis *B*AD, *B*CD, æquales; quorum *B*AD, oſtenſus eſt æqualis ipſi D*B*F; ergo reliquus D*B*E ei, qui in alterna circuli portione DC*B* conſtituitur, videlicet ipſi DC*B*, æqualis erit. Si igitur circulum contingat quædam recta linea, à contactu verò in circulum ducatur recta linea ipſum ſecans; anguli, quos facit ad contingentem, æquales erunt iis, qui in alternis circuli portionibus conſiſtunt; quod oportebat demonſtrare.

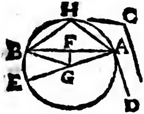
Pro-

(1) 11. primi. (2) 19. hujus. (3) Ex antecedente. (4) 32. primi. (5) 22. hujus.

Problema 5. *Propoſitio* 33. *In data recta linea deſcribere portionem circuli, quæ ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.*







SIt data recta linea A*B*, datus autem angulus rectilineus, qui ad C; itaque oportet in data recta linea A*B*, deſcribere portionem circuli, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo, qui eſt ad C; vel igitur angulus ad C, acutus eſt, vel obtuſus. Sit primum acutus, ut in prima figura, & ad rectam lineam A*B*, & ad punctum in ea datum A, conſtituatur angulus *B*AD, angulo, qui eſt ad C, æqualis; (1) acutus igitur angulus eſt *B*AD, & à puncto A, ipſi AD, ad rectos angulos ducatur AE; (2) ſecetur autem A*B*, bifariam in F, (3) atque à puncto F, ducatur FG ad rectos angulos ipſi A*B*; & G*B* jungatur. Quoniam igitur AF, eſt æqualis F*B*, communis autem FG, duæ AF, FG, duabus *B*F, FG, æquales ſunt; & an-

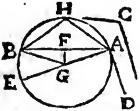
(1) 23. primi. (2) 11. primi. (3) 10. primi.

& angulus AFG, æqualis angulo GFB; ergo baſis AG, baſi GB, eſt æqualis. (4) Itaque centro G, intervallo autem AG, circulus deſcriptus tranſibit etiã per B: (5) deſcribatur, & ſit ABE, jungaturque EB. Quoniam igitur ab extremitate diametri AE, & à puncto A, ipſi AE, ad rectos angulos ducta eſt AD; ipſa AD, circulum continget; & quoniam circulum ABE, contingit quædam recta linea AD, & à contactu, qui eſt ad A, in circulum ABE, ducta eſt recta linea AB: erit angulus DAB, æqualis angulo, qui in alterna circuli portione conſtituitur, (6) videlicet ipſi AEB. Sed angulus DAB angulo, qui ad C, eſt æqualis; ergo, & angulus ad C, angulo AEB æqualis erit. In data igitur recta linea AB, portio circuli deſcripta eſt AEB, ſuſcipiens angulum AEB, dato angulo, qui ad C, æqualem. Sit deinde angulus, qui ad C, rectus, & oporteat rurſus in recta linea AB, deſcribere circuli portionem, quæ ſuſcipiat angulum æqualem recto angulo, qui eſt ad C; conſtituatur enim rurſus angulo recto, qui ad C, æqualis angulus BAD, (7) ut in ſecunda figura, ſeceturque AB, bifariam in F, & centro F, intervallo autem alterutra ipſarum AF, FB, circulus deſcribatur AEB; ergo AD, recta linea circulum ABE contingit, (8) propterea quod rectus eſt, qui ad A angulus, & angulus BAD, ęqualis angulo, qui eſt in portione AEB: rectus enim, & ipſe eſt, in ſemicirculo conſiſtens; ſed BAD, æqualis

I

(4) 4. primi. (5) Corol. 16. hujus. (6) Ex antecedente. (7) 23. primi. (8) Corol. 16. hujus.

lis eſt ei,qui ad C. Ergo,& quod in portione AEB ei, qui ad C, eſt æqualis; deſcripta igitur eſt rurſus in AB recta linea, portio circuli AEB, ſuſcipiens angulum angulo recto, qui ad C, æqualem. Denique

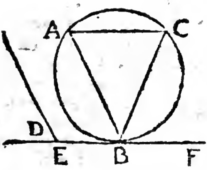


ſit angulus ad C, obtuſus, & ad rectam lineam AB, & ad punctum A, conſtituatur ipſi æqualis angulus BAD, ut habetur in tertia figura, & ipſi AD, rectæ lineæ ad rectos angulos ducatur AE: ſeceturque rurſus AB, bifariam in F; ipſi verò AB, ducatur ad rectos angulos FG, & GB jungatur. Et quoniam AF, eſt æqualis FB; communis autem FG; duæ AF, FG, duabus BF, FG, æquales ſunt, & angulus AFG, angulo BFG, æqualis; baſis igitur AG, eſt æqualis baſi GB. *(9)* Quare centro G, intervallo autem AG, circulus deſcriptus etiam per B, tranſibit; tranſeat, ut AEB. Et quoniam diametro AE, ab extremitate ad rectos angulos ducta eſt AD, ipſa AD, circulum AEB, continget: (10) & à contactu, qui ad A, ducta eſt AB; quare angulus BAD ei, qui in alterna circuli portione AHB, conſtituitur eſt æqualis. Sed BAD angulus æqualis eſt angulo, qui ad C; angulus igitur, qui in portione AHB angulo, qui ad C, æqualis erit. Ergo in data recta linea AB, deſcripta eſt AHB, circuli portio, ſuſcipiens angulum æqualem ei, qui eſt ad C; quod facere oportebat.

Pre-

(9) 4. primi. (10) Corol. 16. hujus.

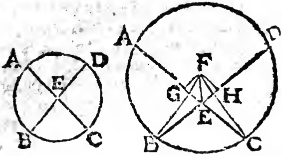
Problema 6. Propoſitio 34. A dato circulo portionem abſcindere, quæ ſuſcipiat angulum dato angulo rectilineo æqualem.



Sit datus circulus ABC, datus autem angulus rectilineus qui ad D; oportet à circulo ABC, portionem abſcindere, quæ ſuſcipiat angulum angulo, qui ad D, æqualem. Ducatur recta linea EF, circulum ABC, in puncto B, contingens: (1) & ad rectam lineam BF, & ad punctum in ea B, conſtituatur angulus FBC angulo, qui eſt ad D, æqualis. (2) Quoniam igitur circulum ABC, contingit quædam recta linea EF, in B puncto, & à contactu B, ducta eſt BC, erit angulus FBC, æqualis ei, qui in alterna circuli portione conſtituitur. Sed FBC angulus, angulo, qui ad D, eſt æqualis; ergo, & angulus, qui in portione BAC, angulo, qui ad D, æqualis erit. A dato igitur circulo ABC abſciſſa eſt portio quædam BAC, ſuſcipiens angulum dato angulo rectilineo, qui eſt ad D, æqualem. Quod facere oportebat.

(1) 17. hujus. (2) 23. primi.

Theorema 29. Propoſitio 35. Si in circulo duæ rectæ lineæ ſe ſe mutuo ſecent, rectangulum portionibus unius contentum æquale eſt ei, quod alterius portionibus continetur.



In circulo enim ABCD, duæ rectæ lineæ AC, BD, ſe ſe mutuò in puncto E, ſecent. Dico rectangulum contentū AE, EC, æquale eſſe ei, quod DE, EB, continetur. Si igitur AC, BD, per centrum tranſeant, ita ut E, ſit centrum ABCD circuli; manifeſtum eſt æqualibus exiſtentibus AE, EC, DE, EB, & rectangulum contentum AE, EC, æquale eſſe ei, quod DE, EB, continetur. Itaque AC, DB, non tranſeant per centrum: & ſumatur centrum circuli ABCD, quod ſit F: & ad F, ad rectas lineas AC, DB, perpendiculares ducantur FG, FH: junganturque FB, FC, FE. Quoniam igitur recta quædam linea GF per centrum ducta, rectam lineam quandam AC non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit; (1) quare AG, ipſi GC, eſt æqualis. Et quoniam recta linea AC, ſecta eſt in partes æquales in puncto G, & in

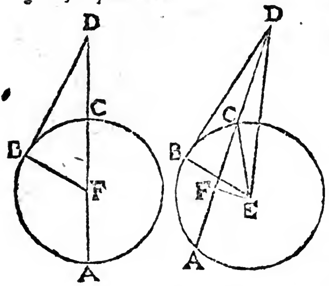
(1) 3. hujus.

in partes inæquales in E, erit rectangulum AE, EC, contentum, unà cum ipſius EG quadrato, æquale quadrato ex GC; (2) commune addatur ex GF quadratum; ergo rectangulum AEC, una cum iis quæ ex EG,GF quadratis,ęquale eſt quadratis ex CG,GF. Sed quadratis quidem ex EG, GF, æquale eſt quadratum ex FE; (3) quadratis verò ex CG,GF, æquale, quod ex FC, quadratum; rectangulum igitur AEC, unà cum quadrato ex FE, æquale eſt quadrato ex FC; eſt autem CF, æqualis FB; ergo rectangulum AEC, una cum quadrato ex EF, æquale eſt ei, quod ex FB, quadrato. Eadem ratione & rectangulum DEB, una cum quadrato ex FE, æquale eſt quadrato ex FB;oſtenſum autem eſt,& rectangulum AEC,una cum quadrato ex FE,æquale ei, quod ex FB, quadrato; ergo rectãgulum AEC,una cum quadrato ex FE, æquale eſt rectangulo DEB, una cũ quadrato ex FE; commune auferatur, quod ex FE, quadratum; reliquum igitur rectangulum AEC, reliquo DEB rectãgulo ęquale erit. Quare ſi in circulo duæ rectæ lineę ſe ſe mutuo ſecent, rectangulum portionibus unius contentum æquale eſt ei, quod alterius portionibus continetur, id quod demonſtrare oportebat.

(2) 5.ſecundi. (3) 47.primi.

Theorema 30. Propoſitio 36. Si extra circulum aliquod punctum ſumatur, & ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò contingat; rectangulum, quod tota ſecante, & exterius aſſumpta inter punctum, & curvam circum-

ferentiam continetur], æquale erit ei, quod à contingente ſit, quadrato.



Extra circulum enim ABC, ſumatur aliquod pũctum D, & ab eo ad dictũ circulum cadãt duę rectæ lineę DCA, DB: & DCA, quidem circulum ABC, ſecet; DB verò contingat. Dico rectangulum ADC, quadrato, quod fit ex DB, æquale eſſe. Vel igitur DCA, per centrum tranſit, vel nõ. tranſeat primum per centrum circuli ABC, quod ſit F, & FB jungatur; erit angulus FBD, rectus (1) Itaque quoniam recta linea AC, bifariam ſecta eſt in F, & ipſi adjicitur CD, rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex FC, æquale erit ei, quod fit ex FD, quadrato. (2) æqualis autem eſt CF, ipſi FB, ergo rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex FB, æquale eſt quadrato ex FD. Sed quadratum ex FD,

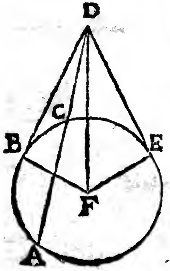
(1) 18. hujus. (2) 6. ſecundi.

FD, eſt æquale quadratis ipſarum FB, BD, rectus enim angulus eſt FBD; rectāgulum igitur ADC, una cum quadrato ex FB, æquale eſt ipſarum FB, BD, quadratis. Commune auferatur quadratum, quod ex FB; ergo reliquū ADC rectangulum, quadrato, quod fit à contingente DB, æquale erit. Sed DCA, non tranſeat per centrum ABC circuli: ſumaturque centrum E, & ab ipſo E, ad AC, perpendicularis agatur EF, & jungantur EB, EC, ED, rectus igitur eſt EFD, angulus. Et quoniam recta linea quædam EF, per centrum ducta, rectam lineam quandam AC, non ductam per centrum ad rectos angulos ſecat, & bifariam ipſam ſecabit; (3) quare AF, ipſi FC, eſt æqualis. Rurſus quoniam recta linea AC, bifariam ſecta eſt in F, atque ipſi adjicitur CD, erit rectangulum ADC, una cum quadrato ex FC, æquale quadrato, quod ex FD; (4) commune apponatur, quod ex FE quadratum; rectangulum igitur ADC, una cum quadratis ex CF, FE, eſt æquale quadratis ex DF, FE; ſed quadratis quidem ex DF, FE, æquale eſt, quod ex DE, quadratum; etenim rectus eſt angulus EFD: quadratis verò ex CF, FE, æquale eſt quadratum ex CE; ergo rectangulum ADC, una cum quadrato, quod ex CE, eſt æquale quadrato ex ED, æqualis autē eſt CE, ipſi EB; rectangulum igitur ADC, una cum quadrato ex EB, æquale eſt ei, quod ex ED quadrato; ſed quadrato ex ED, æqualia ſunt quadrata ex EB, BD: ſi quidem rectus eſt angulus EBD; ergo rectan-

(3) 3.hujus. (4) 6.ſecundi.

gulum ADC,una cum quadrato ex EB,æquale eſt eis, quæ ex EB,BD, quadratis; commune auferatur quadratum ex EB; reliquum igitur ADC rectangulum quadrato, quod fit ex DB, æquale erit. Si igitur extra circulum aliquod punctum ſumatur, & quæ deinceps ſunt; quod oportebat demonſtrare.

Theorema 31. Propoſitio 37. Si extra circulum ſumatur aliquod punctum, atque ab eo in circulum cadant duæ rectæ lineæ, quarum altera quidem circulum ſecet, altera verò incidat, ſit autem quod tota ſecante, & exterius aſſumpta inter punctum, & curvam circumferentiam continetur, rectangulum æquale ei, quod ab incidente fit quadrato: incidens linea circulum continget.



EXtra circulum enim ABC, ſumatur aliquod punctum D, atque ab ipſo in circulum cadant duæ rectæ lineæ DCA, DB; DCA, quidem circulum ſecet, DB verò incidat, ſitque rectangulum ADC æquale quadrato, quod fit ex DB. Dico ipſam DB, circulum ABC, contingere. Ducatur enim recta linea DE, contingens circulum ABC,& ſumatur circuli ABC centrum, quod ſit F, junganturque FE, FB, FD; ergo angulus FED, rectus eſt. (1) Et

(1) Et quoniam DE, circulum ABC contingit, ſecat autem DCA, rectangulum ADC, æquale erit quadrato, quod ex DE; ſed rectangulũ ADC, ponitur æquale quadrato, quod ex DB; quadratum igitur, quod ex DE, quadrato ex DB, æquale erit, ac propterea linea DE, ipſi DB æqualis; eſt autem, & FE, æqualis FB; duæ igitur DE, EF, duabus DB, BF, æquales ſunt; & baſis ipſarum communis FD; angulus igitur DEF, eſt æqualis angulo DBF; (2) rectus autem DEF; ergo, & DBF eſt rectus; atque eſt FB, producta diameter; quæ verò ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur circulum contingit; ergo DB circulum ABC contingat neceſſe eſt. Similiter demonſtrabitur, & ſi centrum ſit in ipſa AC. Si igitur extra circulum ſumatur aliquod pũctum, & reliqua; quod demonſtrare oportebat.

(1) 18. hujus. (2) 8. primi.

Finis Libri Tertij.

En-

EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBER QUARTUS.
Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

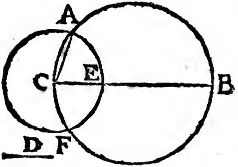
1. Figura rectilinea in figura rectilinea deſcribi dicitur, quando unuſquiſque figuræ deſcriptæ angulus unumquodque latus ejus, in qua deſcribitur, contingit.
2. Figura ſimiliter circa figuram deſcribi dicitur quando unumquodque latus deſcriptæ unũquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.
3. Figura rectilinea in circulo deſcribi dicitur, quando unuſquiſque deſcriptę figurę angulus circuli circumferentiam contingit.
4. Figura rectilinea circa circulum deſcribi dicitur, quando unumquodque latus deſcripti circuli circumferentiam contingit.
5. Circulus ſimiliter in figura rectilinea deſcribi di-

dicitur, quando circuli circumferētia unumquodque latus ejus, in qua deſcribitur contingit.

6. Circulus circa figuram rectilineam deſcribi dicitur, quando circuli circumferentia unumquemque angulum ejus, circa quam deſcribitur, contingit.

7. Recta linea in circulo aptari dicitur, quando ejus extrema ad circuli circumferentiam ſe applicant.

Problema 1. *Propoſitio* 1. *In dato circulo data recta lineæ, quæ diametro ejus major non ſit, æqualem rectam lineam aptare.*



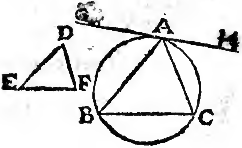
Sit datus circulus ABC, data autem recta linea non major circuli diametro D; oportet in circulo ABC, rectæ lineæ D, æqualem rectam lineam aptare. Ducatur circuli ABC, diameter BC. Si quidem igitur BC ſit æqualis ipſi D, factum jam erit, quod proponebatur; etenim in circulo ABC, aptata eſt AC, rectæ lineæ D, æqualis. Sin minus, major eſt BC, quam D, ponaturque ipſi D, æqualis CE: & centro quidem C, intervallo autem CE, circulus deſcribatur AEF: & CA jungatur. Itaq; quoniam punctum C, centrum eſt AEF circuli; erit CA, ipſi CE, æqualis. Sed D eſt æqualis CE, ergo, &

D, ipſi

Digitized by Google

D, ipſi AC, æqualis erit. In dato igitur circulo ABC, datæ rectæ lineæ D, non majori circuli diametro, æqualis aptata eſt AC; quod facere oportebat.

Problema 2. Propoſitio 2. In circulo dato, dato triangulo æquiangulum triangulum deſcribere.



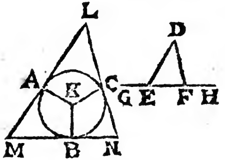
Sit datus circulus ABC, datum autem triãgulum DEF; oportet in ABC circulo deſcribere triangulũ triangulo DEF, ęquiangulum. Ducatur recta linea GAH, contingens circulum ABC, in puncto A: (1) & ad rectam lineam AH, & ad punctum in ea A, angulo DEF, æqualis angulus conſtituatur HAC; (2) rurſus ad rectam lineam AG; & ad punctum in ipſa A, angulo DEF, æqualis conſtituatur angulus GAB; & BC jungatur. Quoniam igitur circulum ABC, contingit quędam recta HAG; à contactu autem in circulum ducta eſt AC: erit HAC, angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione conſiſtit, (3) videlicet ipſi ABC. Sed HAC, angulus æqualis eſt angulo DEF, ergo, & angulus ABC, angulo DEF, eſt æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB, eſt æqualis angulo

---

(1) 17. tertij (2) 23. primi. (3) 32. tertij.

lo DFE; reliquus igitur BAC angulus reliquo EDF, æqualis erit; ergo triangulum ABC, triangulo DEF, eſt æquiangulum; & deſcriptum eſt in circulo ABC. In dato igitur circulo dato triangulo æquiangulum triangulum deſcriptum eſt; quod facere oportebat.

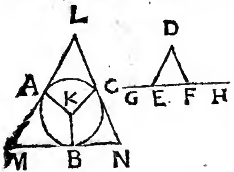
Problema 3. Propoſitio 3. Circa datum circulum, triangulo dato æquiangulum triangulum deſcribere.



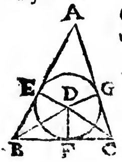
SIt datus circulus ABC: datum autē triangulum DEF; oportet circa circulũ ABC, deſcribere triãgulum, triangulo DEF, æquiangulum; protrahatur ex utraque parte EF, ad puncta H, G, & ſumatur circuli ABC, centrum K: & recta linea KB utcumque ducatur: conſtituaturque ad rectam lineam KB, & ad punctum in ea K, angulo quidem DEG, æqualis angulus BKA, (1) angulo autē DFH, æqualis angulus BKC, & per A, B, C, puncta ducantur rectæ lineæ LAM, MBN, NCL, circulum ABC, contingentes. (2) Quoniam igitur circulum ABC, cōtingunt LM, MN, NL, in punctis A, B, C, à cētro autem K, ad A, B, C, puncta ducuntur KA, KB, KC; erunt anguli ad puncta A, B, C recti; (3) & quoniam

(1) 23. primi. (2) 17. tertij. (3) 18. tertij.

niam quadrilateri AMBK anguli quatuor, quatuor rectis æquales ſunt, etenim in duo triangula diuiditur; quorum anguli KAM, KBM, ſunt recti; erunt reliqui AKB, AMB, duobus rectis æquales. Sunt autẽ, & DEG, DEF, æquales duobus rectis; anguli igitur AKB, AMB, angulis DEG, DEF, æquales ſunt, quorum AKB, ipſi DEG, eſt æqualis; ergo reliquus AMB, reliquo DEF, æqualis erit. Similiter demonſtrabitur angulus LNB, ipſi DFE, æqualis; ergo, & reliquus MLN, eſt æqualis reliquo EDF; æquiangulum igitur eſt LMN, triangulum triangulo DEF, & deſcriptum eſt circa circulum ABC. Quare circa datum circulum triangulo dato æquiangulum triangulum deſcriptum eſt; quod facere oportebat.



Problema 4. *Propoſitio* 4. *In dato triangulo circulum deſcribere.*



Sit datum triangulum ABC, oportet in triangulo ABC, circulum deſcribere. Secentur anguli ABC, BCA, bifariam rectis lineis BD, CD, (1) quæ conveniant inter ſe in D, pun-

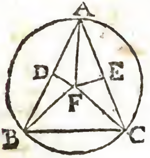
(1) 9. primi.

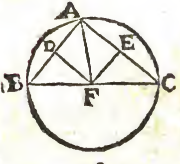
puncto, & à puncto D, ad rectas lineas AB, BC, CA, perpendiculares ducantur DE, DF, DG. (2) Et quoniam angulus ABD, eſt æqualis angulo CBD, eſt autē & rectus BED, recto BFD, æqualis: erunt duo triangula EBD, DBF, duos angulos duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, & utrique commune BD, quod ſcilicet uni æqualium angulorum ſubtenditur; ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, (3) atque erit DE, æqualis DF; & eadem ratione DG, æqualis DF; ergo, & DE, ipſi DG, eſt æqualis; tres igitur rectæ lineæ DE, DF, DG, inter ſe æquales ſunt; quare centro D, intervallo autem una ipſarum DE, DF, DG, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta; & rectas lineas AB, BC, CA, continget; propterea, quòd recti ſunt ad EFG, anguli. Si enim ipſas ſecet, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod eſt abſurdum; (4) non igitur centro D, intervallo autem una ipſarum DE, DF, DG, circulus deſcriptus ſecabit rectas lineas AB, BC, CA, quare ipſas continget; atque erit circulus deſcriptus in triangulo ABC. In dato igitur triangulo ABC, circulus EFG, deſcriptus eſt; quod facere oportebat.

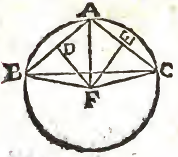
Pro

(2) 12. primi. (3) 26. primi. (4) 16. tertij.

Problema 5. Propoſitio 5. *Circa datum triangulum circu-lum deſcribere.*







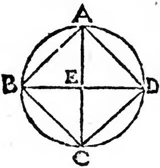
Sit datum triangulũ ABC; oportet circa datum triã-gulũ ABC, circulum deſcri-bere; ſecentur AB, AC, bifa-riam in D, E pũctis: (1) & à pũctis D, E, ipſis AB, AC, ad rectos angulos ducãtur DF, EF; (2) quæ quidẽ vel in-tra triãgulum ABC, conve-nient, vel in recta linea BC, vel extra ipſam. Conveniãt primum intra triãgulum in puncto F: & BF, FC, FA, jun-gãtur. Quoniã igitur AD, eſt æqualis DB, cõmunis autẽ, & ad rectos angulos DF; erit baſis AF, baſi FB, æqualis. (3) Similiter oſtendetur, & CF, æqnalis FA; ergo, & BF, eſt æqualis FC; tres igi-tur FA, FB, FC, inter ſe æquales ſunt; quare centro F, intervallo autem una ip-ſarum FA, FB, FC, circulus deſcriptus etiã per reliqua pun-

(1) 10. primi. (2) 11. primi. (3) 4. primi.

puncta tranſibit: atque erit circulus deſcriptus circa triangulum ABC; & deſcribatur, ut ABC. Sed DF, EF, conveniant in recta linea BC, in puncto F, ut habetur in ſecũda figura, & AF jungatur. Similiter demonſtrabimus punctum F, centrum eſſe circuli circa triangulum ABC, deſcripti. Poſtremo DF, EF, conveniant extra triangulum ABC rurſus in F puncto, ut in tertia figura: & jungantur AF, FB, FC. Et quoniam rurſus AD, eſt æqualis DB, communis autem, & ad rectos angulos DF, baſis AF, baſi FB, æqualis erit. Similiter demonſtrabimus, & CF, ipſi FA, æqualem eſſe; quare, & BF, eſt æqualis FC. Rurſus igitur centro F, intervallo autem una ipſarum FA, FB, FC, circulus deſcriptus, & per reliqua tranſibit puncta; atque erit circa triangulum ABC deſcriptus; & deſcribatur, ut ABC. Circa datum igitur triangulum circulus deſcriptus eſt; quod facere oportebat.

Et manifeſtum eſt, quando centrum circuli intra triangulum cadit, angulum BAC, exiſtentem in portione ſemicirculo majore minorem eſſe recto, quando autem centrum circuli cadit in recta linea BC, angulum BAC, quòd ſit in ſemicirculo, rectum eſſe, & quando extra BC, quòd ſit in portione minore ſemicirculo, recto eſſe majorem. Quare, & quando datus angulus minor ſit recto, DF, EF, intra triangulum convenient: quando autem rectus in ipſa BC, & quando major recto, extra BC; quod oſtendere oportebat.

Problema 6. *Propoſitio* 6. *In dato circulo quadratum deſcribere.*



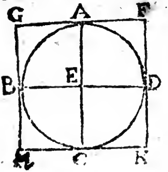
Sit datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quadratum deſcribere. Ducãtur circuli ABCD diametri ad rectos angulos inter ſe AC, BD: & AB, BC, CD, DA, jungantur. Quoniam igitur BE, eſt æqualis ED, etenim centrum eſt E, communis autem, & ad rectos angulos EA; erit baſis BA æqualis baſi AD. Et eadem ratione utraque ipſarum BC, CD, utrique BA, AD, æqualis; æquilaterum igitur eſt ABCD quadrilaterum. Dico, & rectangulum eſſe. Quoniam enim recta linea BD, diameter eſt ABCD circuli, erit BAD ſemicirculus; quare angulus BAD, rectus eſt. (1) Et eadem ratione unuſquiſque ipſorum ABC, BCD, CDA, eſt rectus; rectanguium igitur eſt ABCD quadrilaterum; oſtenſum autem eſt, & æquilaterum eſſe; ergo quadratũ neceſſariò erit, & deſcriptum eſt in circulo ABCD. In dato igitur ABCD circulo quadratum ABCD, deſcriptum eſt; quod facere oportebat.

(1) 31. tertii.

Problema 7. *Propoſitio* 7. *Circa datum circulum quadratum deſcribere.*

Sit datus circulus ABCD, oportet circa ABCD circulum quadratum deſcribere; ducantur circuli ABCD,

ABCD, duæ diametri AC, BD, ad rectos inter ſe angulos, & per pūcta A, B, C, D, ducātur circulū ABCD, contingentes FG, GH, HK, KF. (1) quoniam igitur FG, contingit circulum ABCD, à centro autem E, ad contactum, qui eſt ad A, ducitur EA; erunt anguli ad A, recti. (2) Eadem ratione, & anguli ad puncta B, C, D, recti ſunt. Et quoniam angulus AEB rectus eſt, eſt autem & rectus EBG; erit GH, ipſi AC, parallela. (3) Eadem ratione, & AC, parallela eſt FK. Similiter demonſtrabimus, & utramque ipſarum GF, HK, ipſi BED, parallelam eſſe; quare, & GF, eſt parallela HK; parallelogramma igitur ſunt GK, GC, AK, FB, BK, ac propterea GF quidem eſt æqualis HK, GH, verò ipſi FK. (4) Et quoniam AC, æqualis eſt BD: Sed AC quidem utrique ipſarum GH, FK, eſt æqualis; BD verò æqualis utrique GF, HK, & utraque GH, FK, utrique GF, HK, æqualis erit. Æquilaterū igitur eſt FGHK quadrilaterum. Dico, & rectangulum eſſe; quoniam enim parallelogrāmum eſt GBEA, atque eſt rectus AEB angulus, & ipſe AGB rectus erit. Similiter demonſtrabimus angulos etiam, qui ad puncta H, K, F, rectos eſſe; rectangulum igitur eſt quadrilaterum FGHK: demonſtratum autem eſt, &

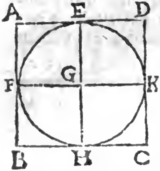


K 2 æqui-

(1) 17.tertij. (2) 18.tertij. (3) 28.primi. (4) 34.primi.

æquilaterum; ergo quadratum ſit neceſſe eſt; & deſcriptum eſt circa circulum ABCD. Circa datum igitur circulum quadratum deſcriptum eſt; quod facere oportebat.

Problema 8. Propoſitio 8. In dato quadrato circulum deſcribere.



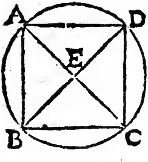
Sit datum quadratum ABCD; oportet in quadrato ABCD, circulum deſcribere. Secetur utraque ipſarum AB, AD, bifariam in punctis F, E; (1) & per E quidem alterutri ipſarũ AB, CD, parallela ducatur EH; (2) per F verò ducatur FK, parallela alterutri AD, BC; parallelogrãmum igitur eſt unũquodque ipſorum AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD: & latera ipſorum, quæ ex oppoſito ſunt, ęqualia. (3) Et quoniam DA eſt æqualis AB; & ipſius quidem AD, dimidia eſt AE; ipſius verò AB, dimidia AF; erit AE, ipſi AF æqualis; quare, & oppoſita latera æqualia ſunt; ergo FG, eſt æqualis GE. Similiter demonſtrabimus, & utramque ipſarum GH, GK, utrique FG, GE, æqualem eſſe; quatuor igitur GE, GF, GH, GK, inter ſe ſunt æquales. Itaque centro quidẽ G, intervallo autem una ipſarum GE, GF, GH, GK, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DA, continget propte-

(1) 10 primi. (2) 31. primi. (3) 34. primi.

pterea, quòd anguli ad E, F, H, K, recti ſunt. Si enim circulus ſecabit rectas lineas AB, BC, CD, DA, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur, intra circulum cadet; quod eſt abſurdum; (4) non igitur centro quidem G, intervallo autem una ipſarum GE, GF, GH, GK, circulus deſcriptus rectas lineas AB, BC, CD, DA, ſecabit; quare ipſas neceſſario continget: atque erit deſcriptus in quadrato ABCD. In dato igitur quadrato circulus deſcriptus eſt; quod facere oportebat.

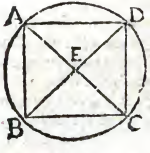
(4) 16. tertij.

Problema 9. Propoſitio 9. Circa datum quadratum circulum deſcribere.



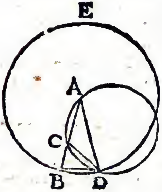
SIt datum quadratũ ABCD; oportet circa ABCD, quadratum circulum deſcribere. jungantur enim AC, BD, quæ ſe invicem in puncto E, ſecent. Et quoniã DA eſt æqualis AB, communis autem AC; duæ DA, AC, duabus BA, AC, æquales ſunt; & baſis DC, æqualis baſi CB; erit angulus DAC, angulo BAC, æqualis; angulus igitur DAB bifariam ſectus eſt recta linea AC. Similiter demonſtrabimus unumquemque angulorum ABC, BCD, CDA, rectis lineis AC, DB, bifariam ſectum eſſe. Quoniam igitur angulus DAB, angulo ABC, eſt æqualis; atque eſt anguli quidem

dem DAB, dimidius angulus EAB, anguli verò ABC, dimidius EBA; & EAB, angulus angulo EBA, æqualis erit; quare, & latus EA, lateri EB, eſt æquale. Simi iter demonſtrabimus, & utramque rectarum linearum EC, ED, utrique EA, EB, æqualem eſſe; ergo quatuor rectæ lineæ EA, EB, EC, ED, inter ſe sũt æquales; centro igitur E, intervallo autem una ipſarum EA, EB,



EC, ED, circulus deſcriptus etiam per reliqua puncta tranſibit; atque erit deſcriptus circa ABCD quadratum; deſcribatur, ut ABCD; circa datum igitur quadratum circulus deſcriptus eſt; quod facere oportebat.

Problema 10. *Propoſitio* 10. *Æquicrure triangulum conſtituere, habens utrumque angulorum, qui ſunt ad baſim, duplum reliqui.*



Exponatur recta quædam linea AB, & ſecetur in C, puncto, ita ut rectangulum contentum AB, BC, æquale ſit ei, quod ex CA, deſcribitur quadrato: (1) & centro quidẽ A, intervallo autem AB, circulus deſcribatur BDE; apteturque

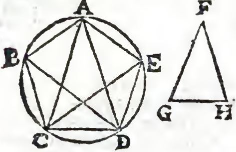
(1) 11. ſecundi.

turque in BDE circulo recta linea BD, æqualis ipſi AC, quæ non ſit major diametro circuli BDE: (2) & junctis DA, DC, circa ADC triangulum circulus ACD deſcribatur. Itaque quoniam rectangulum ABC æquale eſt quadrato, quod fit ex AC; æqualis autem eſt AC ipſi BD; erit ABC rectangulum quadrato, quod ex BD, æquale. Et quoniam extra circulũ ACD, ſumptum eſt aliquod punctum B, & à puncto B, in circulum ACD, cadunt duæ rectæ lineæ BCA, BD, quarum altera quidem ſecat, altera verò incidit, atque eſt rectangulum ABC æquale quadrato, quod ex BD, recta linea BD, circulum ACD, continget. (3) Quoniam igitur BD contingit, & à contactu, qui ad D, ducta eſt DC; erit BDC angulus æqualis ei, qui in alterna circuli portione conſtituitur, (4) videlicet angulo DAC. Quod cum angulus BDC æqualis ſit ipſi DAC, communis apponatur CDA; totus igitur BDA, eſt æqualis duobus angulis CDA, DAC. Sed ipſis CDA, DAC, exterior angulus BCD, eſt æqualis; (5) ergo, & BDA æqualis eſt ipſi BCD. Sed BDA angulus eſt æqualis angulo CBD, quoniam & latus AD lateri AB eſt æquale; ergo, & DBA, ipſi BCD, æqualis erit. Tres igitur anguli BDA, DBA, BCD, inter ſe æquales ſunt. Et quoniam angulus DBC æqualis eſt angulo BCD, & latus BD, lateri DC, eſt æquale. (6) Sed BD, ponitur æqualis ipſi CA, ergo, & AC, eſt æqualis CD; quare, & angulus CDA, æqua-

(2) 1. hujus. (3) ult. tertij. (4) 32. tertij.
(5) 32. primi. (6) 6. primi.

lis eſt angulo DAC; anguli igitur CDA, DAC, ipſius anguli DAC dupli ſunt; eſt autem & BCD, angulus angulis CDA, DAC æqualis, ergo, & BCD, duplus eſt ipſius DAC. Sed BCD, eſt æqualis utrique ipſorum BDA, DBA; quare, & uterque BDA, DBA, ipſius DAB, eſt duplus; æquicrure igitur triangulum conſtitutum eſt ADB, habens utrumque eorum angulorum, qui ſunt ad baſim, duplum reliqui; quod facere oportebat.

Problema II. *Propoſitio* II. *In dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.*



SIt datus circulus ABCDE, oportet in ABCDE circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere. Exponatur triangulum æquicrure FGH, habens utrumque eorú, qui ſunt ad G, H, angulorum duplum anguli, qui eſt ad F: (1) & deſcribatur in circulo ABCDE, triangulo FGH, æquiangulum triangulum ACD, (2) ita ut angulo quidem, qui eſt ad F, æqualis ſit angulus CAD: utrique verò ipſorum, qui ad G, H, ſit æqualis uterque ACD, CDA, & uterque igitur ACD, CDA, anguli CAD, eſt duplus; ſecetur uterque ipſorum ACD, CDA, bifariam rectis lineis CE, DB. (3) &

AB,

(1) Ex antecedente (2) 2. hujus. (3) 9. primi.

AB, BC, CD, DE, EA, iungantur. Quoniam igitur uterque ipſorum ACD, CDA, duplus eſt ipſius CAD, & ſecti ſunt bifariam rectis lineis CE, DB, quinque anguli DAC, ACE, ECD, CDB, BDA, inter ſe ſunt æquales; æquales autem anguli in æqualibus circumferentijs inſiſtunt; (4) quinque igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EA, æquales ſunt inter ſe. Sed æquales circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt; (5) ergo, & quinque rectæ lineæ AB, BC, CD, DE, EA, inter ſe æquales ſunt; æquilaterum igitur eſt ABCDE, pentagonum. Dico, & æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AB, æqualis eſt circumferentiæ DE, cõmunis apponatur BCD; tota igitur ABCD, circumferentia toti circumferentiæ EDCB, eſt æqualis, & in circumferentia quidem ABCD, inſiſtit angulus AED, in circumferentia verò EDCB, inſiſtit BAE. Ergo, & BAE, angulus eſt æqualis angulo AED. Eadem ratione, & unuſquiſque angulorum ABC, BCD, CDE, unicuique ipſorum BAE, AED, eſt æqualis; æquiangulum igitur eſt ABCDE, pentagonum: oſtenſum autem eſt, & æquilaterum eſſe. Quare in dato circulo pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum eſt; quod facere oportebat.

(4) 26. tertij. (5) 29. tertij.

Problema 12. *Propoſitio* 12. *Circa datum circulum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.*

SIt datus circulus ABCDE; oportet circa circulum ABCDE, pentagonum æquilaterum, & æquiangu-

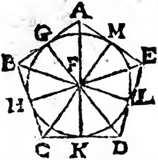
gu-

plus igitur eſt angulus BFC, anguli KFC,& angulus BKC, duplus ipſius FKC. Eadem ratione,& angulus CFD, anguli CFL, eſt duplus : angulus verò CLD, duplus anguli CLF; & quoniam circumferentia BC, circumferentiæ CD, eſt æqualis,& angulus BFC, angulo CFD, æqualis erit; (5) atque eſt angulus quidem BFC, anguli KFC duplus: angulus verò DFC, duplus ipſius LFC, æqualis igitur eſt angulus KFC, angulo CFL. Itaque duo triangula ſunt FKC, FLC, duos angulos duobus angulis æquales habentia, alterum alteri, & unum latus uni lateri æquale, quod ipſis cõmune eſt FC. Ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt. & reliquum angulum reliquo angulo æqualem (6) recta igitur linea KC, eſt æqualis rectæ CL, & angulus FKC, angulo FLC. Et quoniam KC, eſt æqualis CL, erit KL, ipſius KC, dupla. Eadem ratione, & HK, ipſius BK, dupla oſtẽdetur. Rurſus quoniam BK, oſtenſa eſt æqualis ipſi KC, atque eſt KL, quidem dupla KC, Hk, verò ipſius Bk, dupla: erit Hk, ipſi kL, æqualis. Similiter,& unaquæque ipſarum GH, GM, ML, oſtendetur æqualis utrique Hk, kL. Æquilaterum igitur eſt GHkLM pentagonum. Dico etiam æquiangulum eſſe. Quoniã enim angulus FkC, eſt æqualis angulo FLC: & oſtenſus eſt ipſius quidem FkC, duplus angulus HkL, ipſius verò FLC, duplus kLM : erit, & HkL, angulus angulo kLM, æqualis. Simili ratione oſtendetur, & unuſquiſque ipſorum kHG, HGM, GML, utrique HkL,

(5) 27.tertii. (6) 26.primi,

HkL,kLM,ęqualis.Quinque igitur anguli GHk,HkL, kLM,LMG,MGH,inter ſe ęquales ſunt; ergo æquiā-gulnm eſt GHkLM pentagonum;oſtenſum autem eſt etiam æquilaterum eſſe : & deſcriptum eſt circa ABCDE, circulum; quod facere oportebat.

Problema 13. Propoſitio 13. In dato pentagono, quod æquilaterum, & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.



SIt datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE; oportet in ABCDE, pentagono circulum deſcribere; ſecetur uterque angulorū BCD, CDE, bifariam (1) rectis lineis CF, DF; & à puncto F, in quo conveniunt inter ſe CF, DF, ducantur rectæ lineæ FB, FA, FE. Quoniam igitur BC, eſt æqualis CD, cōmunis autem CF, duæ BC, CF, duabus DC, CF, æquales ſunt, & angulus BCF, eſt æqualis angulo DCF; baſis igitur BF, baſi FD, eſt æqualis, & BFC triangugulum æquale triangulo DCF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; (2) angulus igitur CBF, angulo CDF, ęqualis erit. Et quoniam angulus CDE anguli CDF eſt duplus, & angulus quidem CDE, angulo ABC, angulus verò CDF, angulo CBF æqualis; erit & CBA, angulus duplus anguli CBF; ac propterea angulus

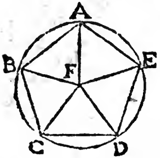
(1) 9. primi. (2) 4. primi.

lus ABF, angulo FBC æqualis; angulus igitur ABC, bifariam ſectus eſt recta linea *BF*. Similiter demonſtrabitur, & unumquemque angulorum *BAE*, AED, rectis lineis AF, FE, bifariam ſectum eſſe. Itaque à puncto F, ad rectas lineas A*B*, *B*C, CD, DE, EA, ducantur perpendiculares FG, FH, F*k*, FL, FM. Et quoniam angulus HCF, eſt æqualis angulo *k*CF; eſt autē, & rectus FHC, recto F*k*C æqualis: erunt duo triangula FHC, F*k*C, duos angulos, duobus angulis æquales habentia, & unum latus uni lateri æquale, commune ſcilicet utriſque FC, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur; ergo, & reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt, (3) atque erit perpendicularis FH, perpendiculari F*k*, æqualis. Similiter oſtendetur, & unaquæque ipſarū FL, FM, FG, æqualis utrique FH, F*k*, quinque igitur rectæ lineæ FG, FH, F*k*, FL, FM, inter ſe æquales ſunt; quare centro F, intervallo autem una ipſarum FG, FH, F*k*, FL, FM, circulus deſcriptus, etiam per reliqua tranſibit puncta, & rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA continget, propterea quòd anguli ad G, H, K, L, M, recti ſunt. Si enim non continget, ſed ipſas ſecabit, quæ ab extremitate diametri circuli ad rectos angulos ducitur intra circulum cadet, quod abſurdum eſſe oſtenſum eſt; (4) non igitur centro F, & intervallo uno ipſorū punctorū G, H, K, L, M, circulus deſcriptus rectas lineas AB, BC, CD, DE, EA ſecabit; quare ipſas contingat neceſſe eſt; deſcribatur, ut GH*k*LM. In dato igi-

(3) 26. primi. (4) 16. tertii.

igitur pentagono, quod eſt æquilaterum, & æquiangulũ, circulus deſcriptus eſt. Quod facere oportebat.

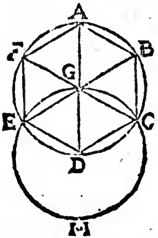
Problema 14. Propoſitio 14. Circa datum pentagonum, quod æquilaterum, & æquiangulum ſit, circulum deſcribere.



Sit datum pentagonum æquilaterum, & æquiangulum ABCDE; oportet circa pentagonum ABCDE, circulum deſcribere: ſecetur uterque ipſorum BCD, CDE, angulorum bifariam rectis lineis CF, FD: & à puncto F, in quo conveniunt rectæ lineæ, ad puncta BAE, ducantur FB, FA, FE. Similiter, ut in antecedenti, demonſtrabitur unumquemque angulorum CBA, BAE, AED, rectis lineis BF, FA, FE, bifariam ſectum eſſe. Et quoniã angulus BCD, angulo CDE, eſt æqualis; atque eſt anguli quidem BCD, dimidius angulus FCD, anguli vero CDE, dimidius CDF; erit, & FCD, angulus æqualis angulo FDC, quare, & latus CF, lateri FD, eſt æquale. Similiter demonſtrabitur, & unaquæque ipſarũ FB, FA, FE, æqualis unicuique FC, FD; quinque igitur rectæ lineæ FA, FB, FC, FD, FE, inter ſe æquales ſunt; ergo centro F, & intervallo una ipſarum FA, FB, FC, FD, FE, circulus deſcriptus etiam per reliqua tranſibit puncta: atque erit deſcriptus circa pentagonum ABCDE, quod æquilaterum eſt, & æquiangulum; deſcribatur, & ſit

ſit ABCDE; circa datum igitur pentagonum æquilaterum, & æquiangulum circulus deſcriptus eſt, Quod facere oportebat.

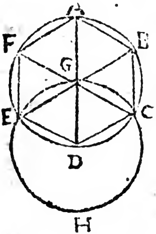
Problema 15. Propoſitio 15. In dato circulo hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



SIt datus circulus ABCDEF; oportet in circulo ABCDEF, hexagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere; ducatur circuli ABCDEF diameter AD, ſumaturque centrum circuli G; & centro quidem D, intervallo autem DG, circulus deſcribatur EGCH; iūctæ EG, CG, ad puncta B, F producantur, & jungantur AB, BC, CD, DE, EF, FA; dico hexagonum ABCDEF, æquilaterum, & æquiangulum eſſe. Quoniam enim G punctum, cētrum eſt ABCDEF circuli, erit GE, ipſi GD, æqualis. Rurſus quoniam D, centrum eſt circuli EGCH, erit DE, æqualis DG, ſed GE, ipſi GD, æqualis oſtenſa eſt; ergo GE, ipſi ED, eſt æqualis; æquilaterum igitur eſt EGD triangulum, ideoque tres ipſius anguli EGD, GDE, DEG, inter ſe æquales ſunt, quoniam æquicrurium triangulorum anguli ad baſim inter ſe ſunt ęquales: (1) & ſunt trianguli tres anguli æquales

(1) 5. primi.

les duobus rectis; (2) angulus igitur EGD, duorum rectorum tertia pars eſt. Similiter oſtendetur, & DGC, duorum rectorum tertia; & quoniam recta linea CG ſuper rectam EB inſiſtens angulos, qui deinceps ſunt EGC, CGB, duobus rectis æquales efficit; (3) erit, & reliquus CGB, tertia duorum rectorum; anguli igitur EGD, DGC, CGB; inter ſe ſunt æquales; ergo, & qui ipſis ad verticem ſunt anguli BGA, AGF, FGE, æquales ſunt angulis EGD, DGC, CGB; quare ſex anguli EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE, inter ſe æquales ſunt; ſed æquales anguli æqualibus circumferentiis inſiſtunt. (4) Sex igitur circumferentiæ AB, BC, CD, DE, EF, FA, inter ſe ſunt æquales; æquales autē circumferentias æquales rectæ lineæ ſubtendunt; (5) ergo, & ſex rectæ lineæ inter ſe æquales ſint neceſſe eſt, ac propterea æquilaterum eſt ABCDEF, hexagonum. Dico, & æquiangulum eſſe. Quoniam enim circumferentia AF, circumferentiæ ED, eſt æqualis, cōmunis apponatur circumferentia ABCD: tota igitur FABCD, circumferentia æqualis eſt toti circumferentiæ EDCBA; & circumferentiæ quidem FABCD,



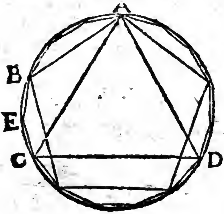
(2) 32. primi. (3) 13. primi. (4) 26. tertii.
(5) 29. tertii.

FABCD, angulus FED inſiſtit, circumferentiæ verò EDCBA, inſiſtit angulus AFE; angulus igitur AFE, angulo DEF, eſt æqualis Similiter oſtendentur, & reliqui anguli hexagoni ABCDEF ſigillatim ęquales utrique ipſorum AFE, FED, ergo æquiangulum eſt ABCDEF hexagonum; oſtenſum autem eſt, & æquilaterum eſſe: & deſcriptum eſt in circulo ABCDEF. In dato igitur circulo hexagonum æquilaterum. & æquiangulũ deſcriptum eſt. Quod facere oportebat.

COROLLARIUM.

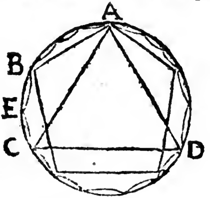
Ex hoc manifeſtum eſt hexagoni latus, ei, quæ eſt ex cẽtro circuli, ęquale eſſe. Et ſi per pũcta A, B, C, D, E, F contingentes circulum ducamus, circa circulum deſcribetur hexagonum æquilaterum, & ęquiangulum cõſequenter ijs, quæ in pentagono dicta ſunt, & prętereà ſimiliter in dato hexagono circulum deſcribemus, & circumſcribemus; quod facere oportebat.

Problema 16. Propoſitio 16. In dato circulo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcribere.



SIt datus circulus ABCD; oportet in ABCD circulo quindecagonum ęquilaterum, & æquiangulum deſcribere. Deſcribatur in circulo ABCD, trianguli quidẽ ęquilateri in ipſo deſcripti latus AC; pentagoni

goni verò æquilateri latus AB. Quarum igitur partium eſt ABCD circulus quindecim, earum circumferentia quidē ABCD tertia exiſtens circuli, erit quinque; circumferētia verò AB, quæ quinta eſt circuli, erit trium; ergo reliqua BC eſt duarum; ſecetur BC bifariam in puncto E; quare utraque ipſarum BE, EC circumferētiarū, quintadecima pars eſt ABCD circuli. Si igitur jungentes BE, EC, æquales ipſis in continuum rectas lineas, in circulo ABCD aptabimus, in ipſo quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum deſcriptum erit; quod facere oportebat.



Similiter autem iis, quæ dicta ſunt in pentagono, ſi per circuli diviſiones contingentes circulum ducamus, circa ipſum deſcribetur quindecagonum æquilaterum, & æquiangulum. Et inſuper dato quindecagono æquilatero, & æquiangulo circulum deſcribemus, & circumſcribemus.

Finis Libri Quarti.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER QUINTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

DIFFINITIONES.

1. PArs eſt magnitudo magnitudinis, minor majoris, quando minor majorem metitur.
2. Multiplex eſt major minoris, quando majorem minor metitur.
3. Proportio eſt duarum magnitudinum ejuſdem generis, quatenus ad quantitatem pertinet, mutua quædam habitudo.
4. Proportionem habere inter ſe magnitudines dicuntur, quæ multiplicatæ ſe invicem ſuperare poſſunt.
5. In eadem proportione magnitudines eſſe dicũtur prima ad ſecundam, & tertia ad quartã, quando primæ, & tertiæ æque multiplices, ſecundæ, & quartæ æque multiplices iuxtà quamuis multiplicationem utraque utramque, vel unà ſuperant,

vel unà æquales ſunt, vel unà deficiunt inter ſe comparatæ.

6. Magnitudines, quæ eandem proportionem habent, proportionales vocentur.

7. Quando autem æque multiplicium multiplex quidem primæ ſuperaverit multiplicem ſecundę, multiplex verò tertiæ non ſuperaverit multiplicē quartæ, tunc prima ad ſecundam majorem proportionem habere dicitur, quàm tertia ad quartã.

8. Analogia eſt proportionum ſimilitudo.

9. Analogia verò in tribus minimis terminis conſiſtit.

10 Quando tres magnitudines proportionales ſunt, prima ad tertiam duplam proportionem habere dicetur ejus, quàm habet ad ſecundam.

11. Quando autem quatuor magnitudines ſunt proportionales, prima ad quartam triplam habere proportionem dicetur ejus, quam habet ad ſecundam, & ſemper deinceps una plus, quoad analogia proceſſerit.

12. Homologæ, vel ſimilis rationis magnitudines dicuntur antecedentes quidem antecedentibus, conſequentes verò conſequentibus.

13. Permutata ratio eſt ſumptio antecedentis ad antecedentem, & conſequentis ad conſequentem.

14. Converſa ratio eſt ſumptio conſequentis, ut antecedentis, ad antecedentem, ut ad conſequentē.

15. Compoſitio rationis eſt ſumptio antecedentis, unà cum conſequente tamquam unius ad ipſam conſequentem.

16. Di-

16. Diviſio rationis eſt ſumptio exceſſus, quo antecedens ſuperat conſequentem, ad ipſam conſequentem.

17. Converſio rationis eſt ſumptio antecedentis ad exceſſum, quo antecedens ipſam conſequentem ſuperat.

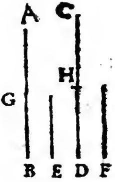
18. Æqua ratio, ſivè ex æquali eſt, cum plures magnitudines extiterint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, fueritque, ut in primis magnitudinibus prima ad ultimam, ita in ſecundis magnitudinibus prima ad ultimam: vel aliter, eſt ſumptio extremarum per ſubtractionem mediarum.

19. Ordinata analogia eſt quando fuerit, ut antecedens ad conſequentem, ita antecedens ad conſequentem; ut autem conſequens ad aliam quampiam, ita conſequens ad aliam quampiam.

20. Perturbata verò analogia eſt, quando tribus exiſtentibus magnitudinibus, & alia ipſis numero æqualibus, fuerit, ut in primis magnitudinibus antecedens ad conſequentem, ita in ſecundis magnitudinibus antecedens ad conſequentem; ut autem in primis magnitudinibus conſequens ad aliã quampiam: ita in ſecundis alia quæpiam ad antecedentem.

Theorema 1. *Propoſitio* 1. *Si fuerint quotcumque magnitudines quotcumque magnitudinũ æqualium numero ſingulę ſingularum ęque multiplices, quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium.*

 Sint

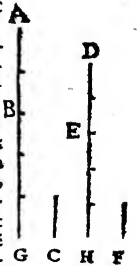


Sint quotcũque magnitudines AB, CD, quotcumque magnitudinum E,F æqualium numero, ſingulæ ſingularũ æque multiplices. Dico quotuplex eſt AB, ipſius E, totuplices eſſe, & AB,CD, ipſarum E,F. Quoniam enim AB, æque multiplex eſt ipſius E, & CD, ipſius F, quot magnitudines sũt in AB æquales ipſi E, tot erũt, & in CD, æquales ipſi F; dividatur AB, quidem in partes ipſi E æquales, quę ſint AG, GB: CD verò diuidatur in partes ęquales ipſi F, videlicet CH, HD; erit igitur multitudo partium CH, HD æqualis multitudini ipſarum AG,GB; & quoniam AG, eſt æqualis E, & CH, ęqualis F; erunt, & AG,CH, æquales ipſi E, F; eadem ratione quoniam GB eſt æqualis E, & HD, ipſi F, erunt, & GB,HD ęquales ipſis E,F; quot igitur ſunt in AB æquales ipſi E, tot ſunt, & in AB, CD, æquales ipſis EF; ergo quotuplex eſt AB, ipſius E, totuplices erunt, & AB, CD, ipſarum EF; ſi igitur fuerint quotcũque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero ſingulæ ſingularum ęque multiplices, quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium; quod demonſtrare oportebat.

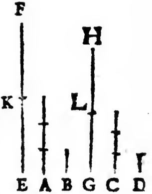
Theorema 2. Propoſitio 2. Si prima ſecunda æque multiplex fuerit, ac tertia quarta, fuerit autem, & quinta ſecunda æque multiplex, ac ſexta quarta; erit etiam compoſita prima, & quinta ſecunda æque multiplex, ac tertia, & ſexta quarta.

Pri-

PRima enim AB, ſecundæ C æque multiplex ſit, ac tertia DE, quartæ F; ſi autē, & quinta BG, ſecundæ C, æque multiplex, ac ſexta EH, quartæ F. Dico, & compoſitam primam, & quintam AG, ſecundæ C æque multiplicem eſſe, ac tertiam, & ſextam DH, quartæ F. Quoniam enim AB, æque multiplex eſt C, ac DE, ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB, æquales C, tot erunt, & in DE, æquales F; eadē ratione, & quot sūt in BG, æquales C, tot & in EH, erunt æquales F; quot igitur ſunt in tota AG, æquales C, tot erunt, & in tota DH, æquales F; ergo quotuplex eſt AG, ipſius C, totuplex eſt, & DH, ipſius F; & compoſita igitur prima, & quinta AG, ſecundæ C æque multiplex erit, ac tertia, & ſexta DH, quartæ F: quare ſi prima ſecundæ æque multiplex fuerit, ac tertia quartæ: fuerit autē, & quinta ſecundæ æque multiplex, ac ſexta quartæ: erit compoſita quoque prima, & quinta æque multiplex ſecundæ, ac tertia, & ſexta quartæ; quod oportebat demonſtrare.



Theorema 3. Propoſitio 3. Si prima ſecunda æque multiplex fuerit, ac tertia quarta; ſumantur autem æque multiplices prima, & tertia, erit, & ex æquali ſumptarū utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecunda, altera verò quarta.

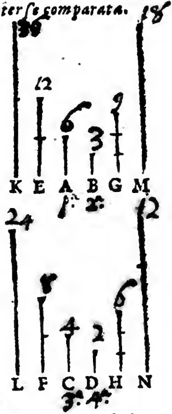


PRima enim A, ſecũdæ B æque multiplex ſit, ac tertia C, quartæ D: & ſumantur ipſarum A,C, ęque multiplices EF,GH. Dico EF, æque multiplicem eſſe ipſius B, ac GH ipſius D. Quoniam enim EF, æque multiplex eſt ipſius A, ac GH, ipſius C; quot magnitudines ſũt in EF, ęquales A, tot erunt,& in GH, ęquales C. Dividatur EF, quidẽ in magnitudines ipſi A, æquales EK,KF, GH verò dividatur in magnitudines æquales C, videlicet GL, LH; erit igitur ipſarũ EK,KF multitudo æqualis multitudini ipſarũ GL,LH;& quoniam æque multiplex eſt A, ipſius B, ac C, ipſius D, æqualis autẽ EK, ipſi A,& GL, ipſi C; erit EK æque multiplex ipſius B, ac GL, ipſius D; eadẽ ratione æque multiplex erit KF, ipſius B, & LH, ipſius D; quoniã igitur prima EK, ſecũdæ B æque multiplex eſt, ac tertia GL, quartæ D; eſt autem, & quinta KF, ſecundæ B æque multiplex, ac ſexta LH, quartæ D: erit,& compoſita prima,& quinta EF, ſecũdæ B æque multiplex, ac tertia, & ſexta GH, quartæ D. (1) Si igitur prima ſecundæ æque fuerit multiplex, ac tertia quartæ, ſumantur autem primæ, & tertiæ æque multiplices: erit, & ex æquali ſumptarum utraque utriuſque æque multiplex, altera quidem ſecundæ, altera verò quartæ; quod oſtendiſſe oportuit.

Theo-

(1) Ex antecedente.

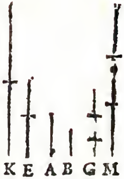
Theorema 4. Propoſitio 4. Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartã, & æque multiplices prima, & tertia ad æque multiplices ſecundæ, & quartæ, iuxtà quamvis multiplicationem, eandem proportionem habebunt inter ſe comparata.



PRima enim A, ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quàm tertia C, ad quartam D: & ſumantur ipſarum, quidem A,C aliæ utcumque æque multiplices E,F; ipſarum verò B,D aliæ utcũque æque multiplices G, H; dico E ad G ita eſſe, ut F, ad H; ſumantur enim rurſus ipſarum E,F, æque multiplices K,L, & ipſarũ G,H, æque multiplices M,N. Quoniam igitur E, æque multiplex eſt ipſius A, atque F, ipſius C; ſumuntur autem ipſarum E,F, æque multiplices K,L: erit K æque multiplex ipſius A, atque L, ipſius C; (1) eadem ratione M æque multiplex erit ipſius B, atque N, ipſius D; & quoniam eſt ut A, ad B; ita C, ad D; ſumptæ autem ſunt ipſarũ A,C, æque multiplices K,L; & ipſarum B,D aliæ utcumque æque multiplices M,N: ſi K ſuperat M, ſuperabit & L ipſam N; & ſi æqualis æqua-

(1) Ex antecedente.

æqualis: & ſi minor minor. (2) Suntque K,L, quidem ipſarum E,F æquè multiplices; M,N verò ipſarum G,H aliæ utcumque æquè multiplices; ut igitur E ad G, ita erit F ad H; (3) quare ſi prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam,& æquè multiplices primæ, ac tertiæ ad æque multiplices ſecundæ, ac quartæ iuxtà quamvis multiplicationem eandem proportionem habebunt inter ſe comparatæ; quod demonſtrare oportebat.



Quoniam igitur demonſtratum eſt ſi K ſuperat M, & L ipſam N ſuperare; & ſi æqualis, æqualem eſſe, & ſi minor, minorem: conſtat etiam ſi M ſuperat K, & N ſuperare ipſam L; & ſi æqualis, æqualem eſſe; & ſi minor, minorem; (4) ac proptereà, ut G ad E, ita eſſe H ad F.



(2) Per converſam quintæ diffin. (3) 5. diffin. (4) 5. diffinit.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt ſi quatuor magnitudines ſint proportionales, & contra proportionales eſſe.

Theo-

Theorema 5. Propoſitio 5. Si magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atque ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque multiplex erit, atque tota totius.

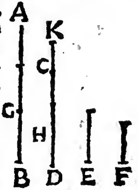


MAgnitudo enim AB magnitudinis CD æque multiplex ſit, atque ablata AE, ablatæ CF; dico, & reliquam EB reliquæ FD æquè multiplicem eſſe, atque totam AB totius CD; quotuplex enim eſt AE ipſius CF, totuplex fiat, & EB ipſius CG; & quoniam AE æque multiplex eſt CF, atque EB ipſius CG; erit AE æquè multiplex CF, & AB ipſius GF, (1) ponitur autem æque multiplex AE ipſius CF, & AB ipſius CD; æque multiplex igitur eſt AB, utriuſque GF, CD; ac propterea GF ipſi CD eſt æqualis; communis auferatur CF, reliqua igitur GC æqualis eſt reliquæ DF. (2) Itaque quoniã AE æque multiplex eſt CF, & EB ipſius CG, eſtque CG æqualis DF; erit AE æque multiplex CF, & EB ipſius FD; æque multiplex autem ponitur AE ipſius CF, & AB ipſius CD; ergo EB eſt æque multiplex FD, & AB ipſius CD; & reliqua igitur EB reliquę FD æque multiplex eſt, atq; tota AB totius CD; quare ſi magnitudo magnitudinis æque multiplex ſit, atq; ablata ablatæ, & reliqua reliquæ æque erit multiplex, atq; tota totius. Quod oportebat demonſtrare.

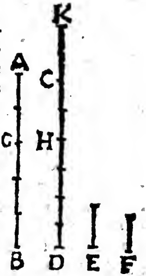
(1) 1. hujus. (2) 2. com. not.

Theorema 6. Propoſitio 6. Si duæ magnitudines duarum magnitudinum æque multiplices ſint, & ablatæ quædam

dam ſint earumdē æque multiplices, erunt & reliqua vel ejuſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices.



Duæ enim magnitudines AB, CD, duarum magnitudinum E, F æque multiplices ſint, & ablatę AG, CH earūdē ſint æque multiplices; dico, & reliquas GB, HD, vel ipſis EF ęquales eſſe, vel ipſarū ęque multiplices; ſit enim primum GB, æqualis E; dico, & HD, ipſi F eſſe æqualē; ponatur ipſi F, æqualis CK; & quoniam AG æque multiplex eſt E, & CH, ipſius F; eſtq; CB, quidē æqualis E; CK vero æqualis F: erit AB æque multiplex E, & KH, ipſius F; (1) æque autē multiplex ponitur AB, ipſius E, & CD, ipſius F; ergo KH æque multiplex eſt F, & CD, ipſius F; quoniam igitur utraque ipſarum KH, CD eſt æque multiplex F, erit KH æqualis CD; communis auferatur CH; ergo reliqua KC reliquæ HD eſt æqualis. (2) Sed KC eſt æqualis F; & HD igitur ipſi F eſt ęqualis; ideoque GB, ipſi E, & HD ipſi F æqualis erit. Similiter demonſtrabimus ſi GB multiplex fuerit ipſius E, & HD ipſius F æque multi-

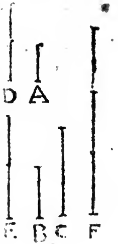


ti-

(1) 1.hujus. (2) 1.com.not.

tiplicem eſſe. Si igitur duæ magnitudines duarum magnitudinũ æque multiplices ſint, & ablatæ quædam ſint earumdem æque multiplices erunt, & reliquę vel eiſdem æquales, vel ipſarum æque multiplices. Quod demonſtrare oportebat.

Theorema 7. Propoſitio 7. Æquales ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales.



Sint æquales magnitudines A, B, alia autem quævis magnitudo C. Dico utramque ipſarum A, B, ad C, eandem proportionem habere: & C, ad utramque A, B, ſimiliter eandem habere proportionẽ. ſumantur enim ipſarum A, B, æque multiplices D, E, & ipſius C, alia utcumque multiplex F. Quoniã igitur æquè multiplex eſt D, ipſius A, & E, ipſius B, eſtque A, ipſi B æqualis, erit & D æqualis E, (1) alia autem utcumque eſt F; ergò ſi D ſuperat F, & E ipsã F ſuperabit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor; & ſunt DE, quidẽ ipſarum A, B æquè multiplices: F verò alia utcumque multiplex ipſius C; erit igitur, ut A ad C, ita B ad C. (2) Dico inſuper C ad utramque ipſarum A, B, eandem habere proportionẽ; iiſdem enim conſtructis ſimiliter oſtendemus D ipſi E æqualem eſſe, aliam verò quandam F; ſi igitur F ſuperat D, ipſam quoque E ſuperabit; & ſi æqualis, æqua-

---

(1) 1. com. not. (2) 5. diff.

Digitized by Google

æqualis & ſi minor, minor; atque eſt F, quidem ipſius C multiplex; DE verò aliæ utcũque æque multiplices ipſarum AB; ergo,ut C ad A,ita erit C ad B; (3) æquales igitur ad eandem, eandem habent proportionem, & eadem ad æquales. Quod oſtendere oportebat.

(3) 5. diff.

Theorema 8. Propoſitio 8. Inæqualium magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor: & eadem ad minorem majorem proportionem habet, quam ad majorem.



Sint inæquales magnitudines AB,C: & ſit AB major: alia verò utcumq; D; dico AB ad D majorem habere proportionẽ, quod C ad D: & D ad C majorem habere, quam ad AB; quoniam enim AB major eſt, quam C, ponatur ipſi C æqualis BE. Itaque minor ipſarũ AE,EB, multiplicata major aliquando erit, quod D. (1) Sit primum AE minor,quam EB,& multiplicetur AE,quo ad fiat major, quàm D, ſitque ipſius multiplex FG, quæ ipſa D ſit major: quotuplex autem eſt FG, ipſius AE,totuplex fiat,& GH ipſius EB, & K ipſius C; ſumaturque ipſius D dupla,quidem L, tripla verò M, & deinceps una plus, que

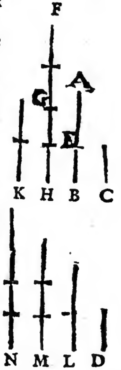


(1) 4.diff.

quo ad ea, quæ ſumitur, multiplex fiat ipſius D, & primo major, quã K ſumatur, ſitque N ipſius D quadrupla, & primo major quam K; quoniam igitur K primo minor eſt, quam N, non erit K minor, quam M; & cum æque multiplex ſit FG ipſius AE, & GH ipſius EB, erit, & FG æque multiplex AE, & FH ipſius AB; (2) æque autẽ multiplex eſt FG ipſi AE, & K ipſius C; ergo FH æque multiplex eſt AB, & K ipſius C, ac propterea FH, K ipſarum AB, C æque multiplices erunt; rurſus quoniam GH æque multiplex eſt EB, & K ipſius C, eſtque EB æqualis C, erit, & GH ipſi K æqualis. (3) Sed K non eſt minor, quam M; non igitur GH minor eſt, quam M, major autem F, G, quam D; ergo tota FH utriſque DM major erit. Sed utræque D, M ſunt æquales N, eſt enim M tripla ipſius D, & utræque MD ipſius D quadruplæ, eſt aũt, & N quadrupla D; utræque igitur MD ipſi N æquales ſunt, ſed FH major eſt quam MD. Quare FH ſuperat N, K verò ipſam N non ſuperat, & ſunt FH, K æque multiplices ipſarum AB, C, & N, ipſius D, alia utcũque multiplex; ergo AB, ad D majorem proportionẽ habet, quam C, ad D. (4) Dico præterea, & D ad C majorem habere proportionem, quam D ad AB; iiſdẽ enim conſtructis ſimiliter oſtendemus N ſuperare K, ipſam verò FH non ſuperare, atque eſt N multiplex ipſius D, & FH, K, aliæ utcumq; ipſarum AB, C æque multiplices; ergo D ad C majorem proportionem habet, quàm D ad AB. Sed ſit AE major, quam EB; erit mi-

(2) 1. hujus. (3) 1. com. not. (4) 7. diff.

minor EB multiplicata aliquando major, quàm D; multiplicetur, & ſit GH multiplex quidem ipſius EB, major verò, quam D; & quotuplex eſt GH, ipſius EB, totuplex fiat, & FG, ipſius AE, & K ipſius C; ſimili ratione oſtendemus FH, K ipſarũ AB, C æque multiplices eſſe; ſumatur deinde N multiplex D, primo autẽ major, quam FG; ergo rurſus FG non eſt minor, quã M: major autem FG, quam D; tota igitur FH ſuperat DM, hoc eſt N; & K ipſam N nõ ſuperat: quoniam EG major exiſtens, quam GH, hoc eſt quam K, nõ ſuperat N; & ſimiliter, ut in iis, quę ſuperius dicta ſunt, demonſtrationem abſolvemus. Inæqualiũ igitur magnitudinum major ad eandem majorem habet proportionem, quam minor, & eadem ad minorem majorem proportionẽ habet, quam ad majorem. Quod oſtendere oportebat.



Theorema 9. Propoſitio 9. Quæ ad eandem, eandem proportionem habent, inter ſe æquales ſunt; & ad quas eadem, eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales.

HAbeat enim utraque ipſarum A, B ad C eãdem proportionem. Dico A, ipſi B, æqualem eſſe, nam ſi non eſſet æqualis, non haberet utraque ipſarũ A, B

A, B ad eandem proportionem. (1) habet autem; æqualis igitur eſt A ipſi B. Habeat rurſus C ad utramque ipſarum A, B eādem proportionem. Dico A æqualem eſſe ipſi B; niſi enim ita ſit, nō habebit C ad utramque A, B eandem proportionem; (2) habet autē; ergo A ipſi B neceſſario eſt æqualis; quæ igitur ad eandem, eandem proportionem habent, æquales inter ſe ſunt: & ad quas eadem eandem habet proportionem, ipſæ inter ſe ſunt æquales; quod demonſtrare oportebat.



(1) Ex antecedente. (2) Ex antecedente.

Theorema 10. *Propoſitio* 10. *Ad eandem proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major eſt; ad quam verò eadem majorem habet proportionem, illa minor eſt.*

HAbeat enim A ad C majorem proportionem, quam B ad C. Dico A, quam B majorem eſſe; ſi enim non eſt major, vel æqualis eſt, vel minor; æqualis autem non eſt A ipſi B, utraque enim ipſarum A, B ad C eandem haberet proportionem; (1) atqui eandem non habet; non igitur A ipſi B eſt æqualis. Sed neque minor eſt A quam B; haberet enim A ad C minorē proportionem, quā B; (2) atqui



M

(1) 7. hujus. (2) 8. hujus.

atqui non habet minorem, non igitur A minor eſt, quam B; oſtenſum autem eſt neque eſſe æqualem; ergo A quam B major erit. Habeat rurſus C ad B majorem proportionem, quam C ad A. Dico B minorem eſſe, quam A; ſi enim non eſt minor, vel æqualis eſt, vel maior; æqualis utique non eſt B ipſi A; etenim C ad utramque ipſarum A, B eandem proportionem haberet, (3) non habet autem; ergo A ipſi B non eſt æqualis. Sed neque major eſt B, quam A; haberet enim C ad B minorem proportionem, quã ad A; (4) atqui non habet; non igitur B quam A eſt major. Oſtenſum autem eſt neque æqualem eſſe; ergo B minor erit, quam A. Ad eandem igitur proportionem habentium quæ majorem proportionem habet, illa major eſt: & ad quam eadem majorem habet proportionem, illa minor eſt; quod oportebat demonſtrare.



(3) 7. hujus. (4) 8 hujus.

Theorema 11. Propoſitio 11. Quæ eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt.

Sit enim, vt A ad B, ita C ad D: ut autem C ad D, ita E ad F. Dico, ut A ad B, ita eſſe E ad F; ſumantur enim ipſarũ, quidem A, C, E æque multiplices G, H, K, ipſarum verò B, D, F aliæ utcũque æque multiplices L, M, N. Quoniã igitur eſt, ut A ad B, ita C ad D, & ſumptæ ſunt ipſarum A, C æque multipli-

ces

ces G,H,& ipſarum B,D aliæ utcumque æque multiplices L,M, ſi G ſuperat L,& H ipſā M ſuperabit,& ſi æqualis, æqualis;& ſi minor,minor;(1) Rurſus quoniā eſt, ut C ad D, ita E ad F, & ſumptæ ſunt ipſarū C, E ęque multiplices H,K; ipſarum verò D,F aliæ utcumque æque multiplices M,N, ſi H ſuperat M, & K ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor; ſed ſi H ſuperat M,& G ſuperabit L;& ſi æqualis,æqualis; & ſi minor minor; quare ſi G ſuperat L,& K ipſam N ſuperabit;& ſi æqualis, æqualis & ſi minor, minor; & ſunt G,K quidem ipſarum A,E æque multiplices; L,N verò ipſarū B,F aliæ utcumque æque multiplices; ergo, ut A ad B, ita erit E ad F, (2) quæ igitur eidem eædem ſunt proportiones, & inter ſe eædem ſunt, quod oſtendiſſe oportuit.

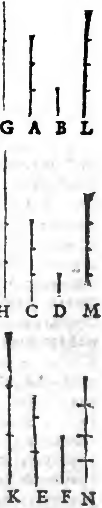


(1) Ex converſa 5. diff. (2) 5. diff.

Theorema 12 Propoſitio 12. Si quotcunque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam conſequentium, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes.

SInt quotcūque magnitudines proportionales A,B, C,D,E,F,& ut A ad B,ita ſit C ad D,& E ad F. Di-

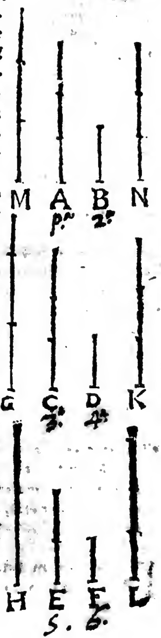
co, ut A ad B; ita eſſe A,C,E ad B,D,F; ſumãtur enim ipſarũ A,C,E æq; multiplices G,H,K,& ipſarũ B,D,F aliç utcũq; çque multiplices L,M,N. Quoniã igitur, ut A ad B, ita eſt C ad D,& E ad F,& sũptæ ſunt ipſarum, quidem A,C,E æque multiplices G,H,K, ipſarũ verò B,D,F aliæ utcũque çque multiplices L,M,N; ſi G ſuperat L,& H ipſam M ſuperabit, & K ipſam N; & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor; (1) quare,& ſi G ſuperat L, ſuperabũt,& G,H,K ipſas L,M,N, & ſi æqualis, æquales; & ſi minor, minores; ſuntque G,& G,H,K ipſarum A, & A,C,E æque multiplices: quoniam ſi fuerint quotcũque magnitudines quotcumque magnitudinum æqualium numero, ſingulæ ſingularum æque multiplices; quotuplex eſt una magnitudo unius, totuplices erunt, & omnes omnium; (2) eadẽ ratione,& L, & L,M,N ipſarum B, & B,D,F sũt æque multiplices; eſt igitur, ut A ad B, ita A,C,E ad B,D,F; (3) quare ſi quotcũque magnitudines proportionales fuerint, ut una antecedentium ad unam conſequentiũ, ita erunt antecedentes omnes ad omnes conſequentes; quod demonſtrare oportebat.



Theo-

(1) Per converſam. 5. diff. (2) 1. hujus. (3) 5. diff.

Theorema 13. Propoſitio 13. Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; tertia autem ad quartam majorem proportionem habeat, quam quinta ad ſextam: & prima ad ſecundam majorem habebit proportionem, quã quinta ad ſextam.



PRima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat, quam tertia C ad quartam D, tertia autem C ad quartam D majorem habeat proportionem, quam quinta E ad ſextam F. Dico, & primam A ad ſecundam B, majorem proportionem habere, quam quintam E ad ſextam F. Quoniam enim C ad D majorem proportionem habet, quam E ad F, ſunt quædam ipſarũ C, E æque multiplices, & ipſarum D, F aliæ utcumque æque multiplices: & multiplex quidẽ C ſuperat multiplicem D; multiplex verò E nõ ſuperat multiplicem F. (1) Sumãtur, & ſint ipſarum C, E æque multiplices G, H, & ipſarum D, F

(1) Per converſam. 7. diff.

aliæ utcumque æque multiplices K,L,ita ut G,qui dē ſuperet K:H verò ipſam L non ſuperet:& quotuplex eſt G ipſius C, totuplex ſit, & M ipſius A; quotuplex autem K ipſius D, totuplex ſit, & N ipſius B; & quoniam eſt, ut A ad B, ita C ad D,& ſumptæ ſunt ipſarum A,C æque multiplices M,G , & ipſarū B,D aliæ utcumque æque multiplices N,K: ſi M ſuperat N , & G ipſam K ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor. (2) Sed G ſuperat K; ergo , & M ipſam N ſuperabit,H verò non ſuperat L, ſuntque M,H ipſarum A,E æque multiplices,& N,L ipſarū B,F aliæ utcumque æque multiplices ; ergo A ad B majorem proportionem habebit , quàm E ad F ; (3) ſi igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem , quàm tertia ad quartam;tertia verò ad quartam majorem proportionem habeat, quam quinta ad ſextā, & prima ad ſecundam majorem habebit proportionem, quam quinta ad ſextam: quod oſtendere oportebat.

(2) Per converſam. 5.diff. (3) 7.diff.

Theorema 14. Propoſitio 14. Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem , quàm tertia ad quartam ; primæ autem major ſit, quam tertia,& ſecunda quam quarta major erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor.

PRima enim A ad ſecundam B eandem proportionem habeat , quam tertia C ad quartam D ;

ma-



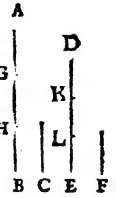
major autem ſit A quàm C. Dico, & B quàm D majorem eſſe. Quoniam enim A major eſt quam C, & alia utcumque magnitudo B, habebit A ad B majorem proportionem, quàm C ad B. (1) Sed, ut A ad B, ita C ad D; ergo, & C ad D majorem habebit proportionem, quàm C ad B; (2) ad quã verò eadem majorem proportionem habet, illa minor eſt. (3) Quare D eſt minor, quàm B; ac propterea B quam D major erit. Similiter demonſtrabimus, & ſi A æqualis ſit ipſi C, & B ipſi D eſſe æqualem, & ſi A ſit minor, quam C, & B quàm D minorem eſſe. Si igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quàm tertia ad quartam, prima autem major ſit, quàm tertia, & ſecunda, quàm quarta major erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor, quod demonſtrare oportebat.

---

(1) 8. hujus. (2) Ex antecedente. (3) 10. hujus.

Theorema 15. Propoſitio 15. Partes eodem modo multiplicium interſe comparatæ eandem habent proportionem.

Sit enim AB æque multiplex C, & DE ipſius F. Dico, ut C ad F, ita eſſe AB ad DE; Quoniam enim æque multiplex eſt AB ipſius C, & DE ipſius F; quot magnitudines ſunt in AB æquales ipſi C, totidem erunt, & in DE æquales F; dividatur AB in



magnitudines ipſi C æquales, quæ ſint AG, GH, HB, & DE dividatur in magnitudines æquales F, videlicet in DK, KL, LE; erit igitur ipſarum AG, GH, HB multitudo æqualis multitudini DK, KL, LE; & quoniam æquales ſunt AG, GH, HB, ſuntque DK, KL, LE inter ſe æquales; vt AG ad DK, ita erit GH ad KL, & HB ad LE; atque erit, ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia, (1) eſt igitur, ut AG ad DK, ita AB ad DE. Sed AG ipſi C eſt æqualis, & DK ipſi F; ergo, ut C ad F, ita erit AB ad DE; partes igitur eodem modo multiplicium inter ſe comparatæ eandem habent proportionē; quod oſtendendum fuit,

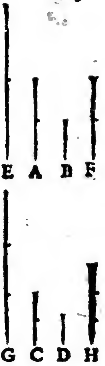
(1) 12. hujus.

Theorema 16. Propoſitio 16. Si quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutata proportionales erunt.

Sint quatuor magnitudines proportionales A, B, C, D, ſitque, ut A ad B, ita C ad D. Dico, & permutatas proportionales eſſe, videlicet, ut A ad C, ita eſſe B ad D. Sumātur enim ipſarum, quidem A, B æque multiplices E, F, ipſarum verò C, D aliç utcumque æque multiplices G, H; & quoniam æque multiplex

Digitized by Google

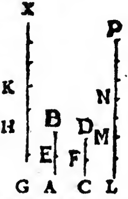
plex eſt E ipſius A, & F ipſius B, partes autem eodem modo multiplicium inter ſe comparatæ eandem habent proportionem: (1) erit, ut A ad B, ita E ad F, ut autem A ad B, ita C ad D; ergo, & ut C ad D, ita E ad F, rurſus quoniam G,H ſunt ipſarum C,D ęque multiplices, partes autem eodem modo multiplicium eandem proportionẽ habent inter ſe comparatæ, (2) erit, ut C ad D, ita G ad H; ſed, ut C ad D, ita E ad F; ergo, & ut E ad F; ita G ad H. Quod ſi quatuor magnitudines proportionales ſint, prima autem major ſit, quàm tertia; & ſecunda quã quarta major erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor. (3) Si igitur E ſuperat G, & F ipſã H ſuperabit, & ſi ęqualis, æqualis, & ſi minor, minor: ſuntque E, F ipſarũ A, B æque multiplices, & C,H ipſarum C,D, aliæ utcumque æque multiplices, ergo, ut A ad C, ita erit B ad D. (4) Si igitur quatuor magnitudines proportionales fuerint, & permutatæ proportionales erunt. Quod oſtendere oportebat.



Theo-

(1) Ex antecedente (2) 11. hujus. (3) 14. hujus. (4) 5. diff.

Theorema 17. Propoſitio 17. Si compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & diviſæ proportionales erunt.



Sint cõpoſitæ magnitudines proportionales AB, BE, CD, DF; ſitque, ut AB ad BE, ita CD ad DF; dico etiã diviſas proportionales eſſe, videlicet, ut AE ad EB, ita eſſe CF ad FD; ſumãtur enim ipſarum, quidem AE, FB, CF, FD, æque multiplices GH, HK, LM, MN, ipſarum verò EB, FD, aliæ utcunque æque multiplices KX, NP; & quoniã æque multiplex eſt GH ipſius AE, & HK ipſius EB; erit GH ipſius AE æque multiplex, & GK ipſius AB; (1) æque autem multiplex eſt GH ipſius AE, & LM ipſius CF; (2) ergo GK æque multiplex eſt AB, & LM ipſius CF; rurſus quoniam æque multiplex eſt LM ipſius CF, & MN ipſius FD; erit LM æque multiplex CF, & LN ipſius CD. (3) Sed æque multiplex erat LM ipſius CF, & GK ipſius AB; æque igitur multiplex eſt GK ipſius AB, & LN ipſius CD; (4) quare GK, LN, ipſarum AB, CD æque multiplices erunt. Rurſus quoniã æque multiplex eſt HK ipſius EB, & MN ipſius FD, eſt autem, & KX ipſius EB æque multiplex, & NP ipſius FD; & compoſita HX ipſius EB æque

(1) 1. hujus. (2) 11. hujus. (3) 8. hujus. (4) 11. hujus.

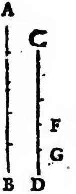
æque multiplex eſt,& MP ipſius FD; (5) quod cum ſit, ut AB ad BE, ita CD ad DF, & ſumptæ ſint ipſarum, quidem AB, CD, æque multiplices GK, LN, ipſarum verò EB, FD aliæ utcumque æque multiplices HX, MP; ſi GK ſuperat HX,& LN ſuperabit MP, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor (6) ſuperet igitur GK ipſam HX, communique ablata HK,& GH ipſam KX ſuperabit; ſed ſi GK ſuperat HX, & LN ſuperat MP; itaque ſuperet LN, ipſam MP, communique MN ablata, & LM ſuperabit NP; quare ſi GH ſuperat KX, & LM ipſam NP ſuperabit. Similiter demonſtrabimus, & ſi GH ſit æqualis KX, & LM ipſi NP eſſe æqualem, & ſi minor, minorem; ſunt autem GH, LM ipſarum AE, CF æque multiplices, & ipſarum EB, FD aliæ utcumque æque multiplices KX, NP; ergo, ut AE ad EB, ita erit CF ad FD. (7) Si igitur compoſitæ magnitudines ſint proportionales,& diuiſæ proportionales erunt. Quod demonſtrare oportebat.

(5) 2.hujus. (6) Ex converſa 5.diff. (7) 5.diff.

Theorema 18. Propoſitio 18. Si diviſa magnitudines ſint proportionales, & compoſita proportionales erunt.

Sint diviſæ magnitudines proportionales AE, EB, CF, FD: & ut AE ad EB, ita CF ad FD. Dico etiam compoſitas proportionales eſſe, videlicet ut AB ad BE, ita eſſe CD ad DF. Si enim non eſt, ut AB ad BE, ita CD ad DF; erit, ut AB ad BE, ita CD

vel



vel ad minorem , quàm DF , vel ad majorem. Sit primum ad minorem , nempè ad DG; & quoniam eſt , ut AB ad BE, ita CD ad DG compoſitæ magnitudines sũt proportionales; ergo , & diviſæ proportionales erunt ; (1) eſt igitur , ut AE ad EB, ita CG ad GD; ponitur autem , & ut AE ad EB, ita CF ad FD; quare,& ut CG ad GD, ita CF ad FD; (2) at CG prima major eſt, quam tertia CF; ergo,& ſecũda DG, quàm quarta DF major erit; (3) ſed, & minor,quod fieri non poteſt; non igitur eſt , ut AB ad BE , ita CD ad DG ; ſimiliter oſtendemus neque eſſe ad majorem , quàm DF ; ad ipſam igitur DF ſit neceſſe eſt. quare ſi diviſæ magnitudines ſint proportionales , & compoſitæ proportionales erunt. Quod oportebat demoſtrare.

---

(1) Ex antecedente. (2) 11.hujus. (3) 14. hujus.

Theorema 19. Propoſitio 19. Si fuerit , ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit,ut tota ad totam.

SIt enim, ut tota AB ad totam CD , ita ablata AE ad ablatam CF; dico, & reliquam EB ad reliquã FD ita eſſe, ut tota AB ad totam CD; quoniam enim eſt , ut tota AB ad totam CD, ita AE ad CF , & permutando erit,ut BA ad AE, ita DC ad CF; (1) quoniam

---

(1) 16.hujus.

niam compoſitæ magnitudines ſunt proportionales, & diviſæ proportionales erunt, (2) ut igitur BE ad EA, ita DF ad FC, rurſuſque permutando, ut BE ad DF, ita EA ad FC. Sed, ut AE ad CF, ita poſita eſt AB ad CD; & reliqua igitur EB erit ad reliquam FD, ut tota AB ad totam CD; (3) quare ſi fuerit, ut tota ad totam, ita ablata ad ablatam; & reliqua ad reliquam erit, ut tota ad totam. Quod demonſtrare oportebat.



Et quoniam oſtenſum eſt, ut AB ad CD, ita eſſe EB ad FD, erit permutādo, ut AB ad BE, ita CD ad DF; ergo compoſitæ magnitudines proportionales ſunt; oſtenſum autem eſt, ut BA ad AE, ita DC ad CF, quod eſt per converſionē rationis.

---

(2) 17.hujus. (3) 11.hujus.

COROLLARIUM.

Ex hoc igitur perſpicuum eſt ſi compoſitæ magnitudines ſint proportionales, & per converſionem rationis proportionales eſſe.

Factæ autem ſunt proportiones, & in æque multiplicibus, & in analogiis; nam ſi prima ſecundæ æque multiplex ſit, atque tertia quartæ, erit, & ut prima ad ſecundam, ita tertia ad quartam; ſed non item

Item ex contrario convertitur. Si enim ſit , ut prima ad ſecundam,ita tertia ad quartam,non omnino erit prima,quidem ſecundæ æque multiplex,tertia verò, quartæ , velut in ſeſquialteris , vel in ſeſquitertiis proportionibus , vel aliis ejuſmodi . Quod demonſtrare oportebat.

Theorema 20. Propoſitio 20. Si ſint tres magnitudines,& aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur,& in eadem proportione ,ex æquali autem prima major ſit, quàm tertia, & quarta quàm ſexta major erit ; & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor.

Sint tres magnitudines A,B,C, & aliæ ipſis numero æquales D,E,F binæ ſũptæ , & in eadem proportione , ſitque ut A,ad B, ita D ad E,& ut B ad C, ita E ad F,ex æquali autẽ major ſit A,quod C Dico, & D quam F majorem eſſe,& ſi æqualis, æqualem,& ſi minor, minorem.Quoniam enim A major eſt, quàm C, alia vero utcumque B, & major ad eandem majorem habet proportionem,quàm minor, (1) habebit A ad B majorem proportionem, quam C ad B. Sed, ut A ad B, ita D ad E, & convertendo, ut C ad B; ita F ad E; ergo,& D ad E majorem habet proportionem , quàm F ad E. Ad eandem vero proportionem habentium quæ majorem ha-



(1) 8.hujus.

habet proportionem, illa major eſt; (2) major igitur eſt D quam F. ſimiliter oſtendemus, & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F æqualem eſſe, & ſi minor, minorem. *Si* igitur tres magnitudines fuerint, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione, ex æquali autem prima major ſit, quam tertia, & quarta quam ſexta major erit, & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor. Quod oſtendere oportebat.

---

(2) 10. hujus.

Theorema 21. Propoſitio 21. Si ſint tres magnitudines, & alia ipſis numero aquales, qua bina ſumantur, & in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia, & ex aquali prima major ſit quam tertia; & quarta quã ſexta major erit, & ſi aqualis, aqualis, & ſi minor, minor.



A B C

SInt tres magnitudines proportionales A, B, C, & aliæ ipſi numero æquales D, E, F, binæ ſũptę, & in eadẽ proportione. Sit aũt perturbata earũ analogia, videlicet, ut A quidem ad B, ita E ad F; ut verò B ad C, ita D ad E; & ex æquali A major ſit, quam C. Dico, & D quam F majorem eſſe; & ſi æqualis, ęqualem, & ſi minor, minorẽ. Quoniam enim major eſt A, quam C, alia vero B; habebit A ad B majorem proportio-



D E F

tionem quam C ad B. (1) Sed,ut A ad B,ita E ad F, & convertendo,ut C ad B,ita E ad D. Quare, & E ad F majorem habebit proportionem, quam E ad D. Ad quam vero eadem majorem proportionẽ habet; illa minor eſt; (2) minor igitur eſt F, quàm D; ac proptereà D quam F major erit. Similiter oſtendemus, & ſi A ſit æqualis C, & D ipſi F eſſe æqualem; & ſi minor, minorem. Si igitur ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis æquales numero, quæ binæ ſumantur, & in eadem proportione; ſit autem perturbata earum analogia, & ex æquali prima major ſit quam tertia: & quarta, quam ſexta major erit; & ſi æqualis, æqualis; & ſi minor, minor; quod demonſtrare oportebat.

(1) 8.hujus. (2) 10.hujus.

Theorema 22. Propoſitio 22. Si ſint quotcumque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione; & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint quotcumque magnitudines A,B,C,& aliæ ipſis numero æquales D,E,F binæ ſumptæ in eadẽ proportione, ſitque, ut A quidem ad B, ita D ad E, ut autem B ad C, ita E ad F. Dico, & ex æquali in eadem proportione eſſe, ut A ad C, ita D ad F. Sumantur enim ipſarum quidem A,D ęque multiplices G,H; ipſarum vero B,E aliæ utcumque æque multiplices K,L, & ipſarum C,F aliæ utcumque æque mul-

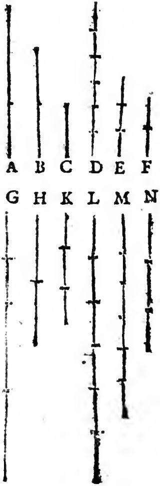
multiplices M,N. Quoniã igitur eſt,ut A ad B,ita D ad E,& ſumptæ ſunt ipſarum A, D, æque multiplices G,H,& ipſarum B,E,aliæ utcumque ęque multiplices K,L; erit, ut G ad K,ita H ad L. (1) Eadem quoque ratione erit,ut K ad M,ita L ad N. Et cũ ſint tres magnitudines G, K, M, & aliæ ipſis numero æquales H,L,N, binæ ſumptæ, & in eadem proportione, ex æquali ſi G ſuperat M, & H ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis,ęqualis;& ſi minor, minor (2) ſuntque G,H, ipſarum A,D æque multiplices,& M,N ipſarum C,F aliç utcumque æque multiplices. Ut igitur A ad C,ita erit D ad F. (3) Quare ſi ſint quotcũque magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur, in eadem proportione,& ex æquali in eadem proportione erunt. Quod demonſtrare oportebat.



(1) 4 hujus. (2) 20.hujus. (3) 5.diff.

Theorema 23. Propoſitio 23. Si ſint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero æquales, quæ binæ ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia, & ex æquali in eadem proportione erunt.

Sint tres magnitudines A,B, C, & aliæ ipſis numero æquales binæ ſumptæ in eadē proportione D,E,F; ſit autem perturbata earum analogia, & ſit, ut A ad B, ita E ad F, & ut B ad C, ita D ad E. Dico, ut A ad C, ita eſſe D ad F; ſumantur ipſarum quidem A,B,D, æque multiplices G,H,L, ipſarum verò C,E,F, aliæ utcumque æque multiplices K, M, N; & quoniam G, H æque multiplices ſunt ipſarum A, B, partes autem eodem modo multiplicium eandem habent proportionem; (1) erit, ut A ad B, ita G ad H; & ſimili ratione, ut E ad F, ita M ad N; atque eſt, ut A ad B, ita E ad F; ut igitur G ad H, ita M ad N; (2) rurſus quoniam eſt, ut B ad C, ita D ad



(1) 15. hujus. (2) 11. hujus.

ad E, & ſumptæ ſunt ipſarum B, D, æque multiplices H, L, ipſarum vero C, E aliæ utcumque æque multiplices K, M: erit, ut H ad K, ita L ad M; (3) oſtenſum autem eſt, & ut G ad H, ita eſſe M ad N. Quoniam igitur tres magnitudines proportionales ſunt G,H,K, & aliæ ipſis numero æquales L,M,N binæ ſumptæ in eadem proportione, eſtque ipſarum perturbata analogia; ex æquali ſi G ſuperat K, & L ipſam N ſuperabit; & ſi æqualis, æqualis, & ſi minor, minor. (4) ſunt autem G,K ipſarum A,C ęque multiplices, & L, N æque multiplices ipſarum D, F, ut igitur A ad C, ita erit D ad F; (5) quare ſi fuerint tres magnitudines, & aliæ ipſis numero ęquales, quę binę ſumantur in eadem proportione, ſit autem perturbata earum analogia; & ex æquali in eadem proportione erunt: quod demonſtrare oportebat.

---

(3) 4. hujus. (4) 21. hujus. (5) 5. diff.

Theorema 24. Propoſitio 24. Si prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam; habeat autem, & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima, & quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & ſexta ad quartam.

PRima enim AB, ad ſecundam C eandem habeat proportionem, quam tertia DE ad quartam F. habeat autem, & quinta BG ad ſecundam C proportionem eandem, quam ſexta EH ad quartam F. dico,

N 2 & com-

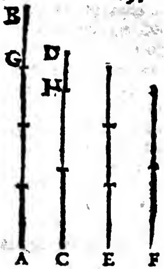


& compoſitam primam, & quintam AG ad ſecundam C eandem proportionem habere, quam tertiam, & ſextam DH ad quartam F: quoniam enim eſt, ut BG ad C, ita EH ad F: erit convertendo, ut C ad BG, ita F ad EH: & quoniam, ut AB ad C, ita eſt DE ad F, ut autem C ad BG, ita F ad EH: erit ex æquali, ut AB ad BG, ita DE ad EH: (1) quod cum diviſæ magnitudines ſint proportionales, & compoſitæ proportionales erunt: ut igitur AG ad GB, ita eſt DH ad HE: ſed, & ut GB ad C, ita EH ad F: ergo ex æquali, ut AG ad C, ita erit DH ad F: ſi igitur prima ad ſecundam eandem habeat proportionem, quam tertia ad quartam: habeat autem, & quinta ad ſecundam proportionem eandem, quam ſexta ad quartam: & compoſita prima, & quinta ad ſecundam eandem proportionem habebit, quam tertia, & ſexta ad quartam. Quod oſtendere oportebat.

(1) 22. hujus.

Theorema 25. Propoſitio 25. Si quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum, & minima duabus reliquis majores erunt.

SInt quatuor magnitudines proportionales AB, CD, EF: & ſit ut AB ad CD, ita E ad F: ſit al-



autem maxima ipſarum AB, & F minima: dico AB, F ipſis CD, E majores eſſe. Ponatur enim ipſi quidem E æqualis AG, ipſi vero F æqualis CH. Quoniam igitur eſt, ut AB ad CD, ita E ad F eſtque AG æqualis E, & CH æqualis F: erit, ut AB ad DC, ita AG ad CH, & quoniam ut tota AB ad totam CD, ita ablata AG ad ablatam CH: & reliqua GB ad reliquam HD erit, ut tota AB ad CD totam. (1) major autem eſt AB, quàm CD: ergo, & GB, quàm HD major: quòd cum AG ſit æqualis ipſi E, & CH ipſi F: erunt AG, F ipſius CH, E æquales: ſi autem inæqualibus æqualia addantur, tota inæqualia erunt: ergo GB, HD inæqualibus exiſtentibus, quippè cum GB ſit major, ſi ipſi quidem GB addantur AG, F, ipſi verò HD addantur CH, E, fient AB, F ipſis CD, F neceſſario majores Si igitur quatuor magnitudines fuerint proportionales, maxima ipſarum, & minima duabus reliquis majores erunt. Quod demonſtrare oportebat.

(1) 19. hujus.

Theorema 26. Propoſitio 26. Si prima ad ſecundam majorem habeat proportionem, quam tertia ad quartam, & convertendo ſecunda ad primam minorem propor-

tionem habebit, quam quarta ad tertiam.



HAbeat AB ad BC majorem proportionẽ, quam DE ad EF. Dico CB ad BA minorem proportionem habere, quam FE ad ED; ut enim AB ad BC, ita ſit DE ad aliam aliquam, ut ad G; ergo DE ad G majorem habebit proportionem, quam DE ad EF, (1) ac propterea G minor erit, quam EF; ponatur ipſi G æqualis EH. Quoniam igitur eſt, ut AB ad BC, ita DE, ad EH; erit convertendo, ut CB ad BA, ita HE ad ED. Sed HE ad ED minorem proportionem habet, quam FE ad ED, ergo, & CB ad BA minorem habebit proportionem, quam FE ad ED, quod demonſtrare oportebat.



Similiter autem, & ſi AB ad BC minorem proportionẽ habeat, quam DE ad EF; demonſtrabimus convertendo CB ad BA majorem habere proportionem, quam FE ad ED; ſed, ut AB ad BC, ita ſit DE ad aliam, ut ad EG quæ major erit, quàm EF; quare convertendo, ut CB ad BA, ita GE ad ED; at GE ad ED majorem habet proportionem, quam FE ad ED; ergo CB ad BA majorem proportionẽ habebit, quam FE ad ED.

(1) 8. hujus.

COROLLARIUM.

Ex his conſtat, ſi AB ad BC majorem proportionem

nem habeat, quam DE ad EF, & FE ad ED majorem habere proportionem, quàm CB ad BA. Et ſi AB ad BC minorem habeat proportionem, quam DE ad EF, & FE ad ED minorem proportionem habere, quam CB ad BA.

Theorema 27. Propoſitio 27. Si prima ad ſecundam majorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam, & permutando prima ad tertiam majorem habebit proportionem, quam ſecunda ad quartam.

HAbeat AB ad BC majorem proportionē, quam DE ad EF; dico AB ad DE majorem proportionem habere, quam BC ad EF; ut enim



AB ad BC, ita alia quædam GE ſit ad EF; manifeſtum eſt eam majorem eſſe, quàm DE; (1) quare permutando, ut AB ad GE, ita eſt BC ad EF; habet autem AB ad DE majorem proportionem, quam AB ad GE, hoc eſt quam BC ad EF; ergo AB ad DE majorem proportionem habebit, quam BC ad EF; quod oportebat demonſtrare.

Eadem ratione, & ſi AB ad BC minorem habeat proportionem, quam DE ad EF; ſequetur permutando AB ad DE



minorem proportionem habere, quam BC ad EF; erit enim, ut AB ad BC, ita alia quædam GE ad

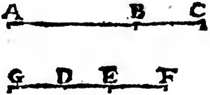
(1) 8.hujus.

Digitized by Google

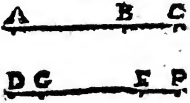
EF, quæ minor ſit, quàm DE. Sed AB ad DE minorem habet proportionem, quam AB ad GE, videlicet quam BC ad EF: habebit igitur AB ad DE minorem proportionem, quam BC ad EF.

Theorema 28. *Propoſitio* 28 *Si prima ad ſecundam majorem proportionem habeat, quam tertia ad quartam: etiam componendo prima, & ſecunda, ad ſecundam majorem proportionem habebit, quam tertia, & quarta, ad quartam.*

Habeat AB ad BC majorem proportionem, quam DE ad EF; dico AC ad CB majorē habere proportionem, quam DF ad FE, ut enim AB ad BC, ita ſit alia quædam GE ad EF; erit GE major, quàm DE; (1) quoniam igitur eſt, ut AB ad BC, ita GE ad EF; erit componendo, ut AC ad CB, ita GF ad FE. (2) Sed GF ad FE majorem proportionem habet, quam DF ad FE; (3) ergo, & AC ad CB majorem habebit proportionem, quam DF ad FE; quod demonſtrare oportebat:



Quòd ſi AB ad BC minorem proportionem habeat, quam DE ad EF; habebit etiam componendo AC ad CB minorem proportionē, quam DF ad FE;



tur-

(1) 8.hujus. (2) 18.hujus. (3) 13.hujus.

rurſus enim, quoniam AB ad BC minorem proportionem habet, quam DE ad EF, ſi ut AB ad BC, ita ſit alia quædam ad FE, velut GE, erit ea minor quàm DE, (4) & ut AC ad CB, ita erit GF ad FE. Sed GF ad FE minorem habet proportionem, quàm DF ad FE; ergo, & AC ad CB minorem proportionem habebit, quàm DF ad FE.

(4) 8.hujus.

Theorema 29. Propoſitio 29. Si prima, & ſecunda, ad ſecundam majorem habeat proportionem, quam tertia, & quarta, ad quartam, & dividendo prima ad ſecundam majorem proportionem habebit, quam tertia ad quartam.

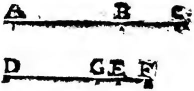


HAbeat AC ad CB majorem proportionem, quam DF ad FE; dico AB ad BC, majorem proportionem habere, quam DE ad EF; ut enim DF ad FE, ita ſit alia quædam GC ad CB; erit utique GC minor, quàm AC: (1) & dividendo GB ad BC, ut DE, ad EF, (2) at AB ad BC majorem proportionem habet, quam GB ad BC; (3) ergo, & AB ad BC majorem habebit proportionem, quam DE ad EF.

Si vero AC ad CB minorem habeat proportionem, quam

(1) 8.hujus. (2) 17.hujus. (3) 13.hujus.

Similiter autem,& ſi AC ad CB minorem proportionem habeat, quam DF ad FE; habebit per converſionem rationis CA ad AB majorem proportionẽ, quam FD ad DE; erit enim, ut AC ad CB, ita DF ad FG majorẽ, quàm FE; reliqua vero manifeſta erunt.



Theorema 31. *Propoſitio* 31. *Si prima ad tertiam majorem proportionem habeat, quam ſecunda ad quartam, etiam prima ad tertiam habebit majorem proportionem, quam prima, & ſecunda ad tertiam, & quartã.*

HAbeat AB ad DE majorem proportionẽ, quam BC ad EF, dico, & AB ad DE majorem proportionem habere, quam AC ad DF. Sit enim, ut AB ad DE, ita BC ad aliam; erit igitur ad minorem, quàm EF, velut ad EG; tota igitur AC ad totam DG eſt, ut AB ad DE. (1) Sed AC ad DG majorem proportionem habet, quam ad DF; (2) ergo AB ad DE majorem habebit proportionem quam AC ad DF, & manifeſtum eſt totam AC ad totam DF minorem proportionem habere, quam AB ad DE, & ſi minor ſit proportio partis, totius major erit.



Theo-

(1) 12.hujus. (2) 8.hujus.

Theorema 32. Propoſitio 32. Si tota ad totam majorem habeat proportionem, quam ablata ad ablatam, & reliqua ad reliquam majorem proportionem habebit, quam tota ad totam.



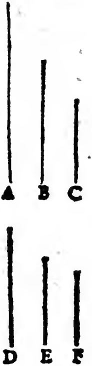
Habeat AC ad DF majorem proportionem, quam AB ad DE. Dico, & reliquam BC ad reliquam EF majorem proportionem habere, quam AC ad DF Sit enim, ut AC ad DF, ita AB ad DG, ergo, & reliqua BC ad reliquam GF eſt, ut AC ad DF. (1) Sed BC ad EF majorem proportionem habet, quam ad FG; ergo, & BC ad EF majorem habebit proportionem, quam AC ad DF.

Si vero AC ad DF minorẽ proportionem habeat, quam AB ad DE, & reliqua BC ad reliquam EF minorem proportionem habebit, quam AC ad DF, quod eodem, quo ſuprà, modo oſtendetur.

(1) 19. hujus.

Theorema 33. Propoſitio 33. Si ſint tres magnitudines, & alia ipſis numero aquales, habeatque prima priorum ad ſecundam majorem proportionem, quam prima poſteriorum ad ſecundam; ſecunda vero priorum ad tertiam majorem proportionem habeat, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam: etiam ex aquali prima priorum ad tertiam majorem habebit proportionem, quam prima poſteriorum ad tertiam. Ha-

HAbeat A ad B majorem proportionem, quam D ad E, & B ad C majorem proportionem habeat, quã E ad F. Dico ex æquali A ad C majorem habere proportionem, quam D ad F. Quoniam enim A ad B majorem proportionem habet, quam D ad E, habebit permutando A ad D majorem proportionem, quam B ad E, (1) & eadem ratione B ad E majorem, quam C ad F; ergo A ad B majorem habet proportionem, quam C ad F; & rurſus permutando A ad C majorem habebit, quam D ad F. (2) Quod oportebat demonſtrare.



Quòd ſi prima priorum ad ſecundam minorem habeat proportionẽ, quam prima poſteriorum ad ſecundam; ſecunda vero priorum ad tertiam minorem proportionẽ habeat, quam ſecunda poſteriorum ad tertiam: ſimiliter demonſtrabitur etiam ex æquali primam priorum ad tertiam minorem proportionem habere, quam primam poſteriorum ad tertiam.

---

(1) 27.hujus. (2) 27.hujus.

Finis Libri Quinti.

EUCLIDIS ELEMENTORUM LIBER SEXTUS.

Ex traditione Federici Commandini.

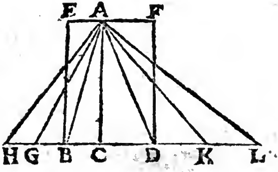
DIFFINITIONES.

1. Similes figuræ rectilineæ ſunt, quæ & ſingulos angulos æquales habent, & circa æquales angulos latera proportionalia.
2. Reciprocæ figuræ ſunt, quando in utraque figura antecedentes, & conſequentes rationes fuerint.
3. Extrema, ac media ratione ſecari recta linea dicitur, quando ſit, ut tota ad majorem portionem, ita major portio ad minorem.
4. Altitudo cujuſque figuræ eſt linea perpendicularis, quæ à vertice ad baſim ducitur.
5. Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter ſe multiplicatæ, aliquam efficiunt proportionem.

6 definitio reperitur pag. 265

Tlgo.

Theorema 1. *Propoſitio* 1. *Triangula, & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem, inter ſe ſunt, ut baſes.*



Sint triangula quidem ABC, ACD parallelogramma vero EC, CF, quæ eandem habeãt altitudinem, videlicet perpendicularem à puncto A ad B,D duſtam. Dico, ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe triangulum ABC ad triangulum ACD, & parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum; producatur enim BD ex utraq; parte ad puncta H, L, & ipſi quidem BC baſi æquales quotcumque ponantur BG, GH, ipſi vero baſi CD ponantur quotcumque æquales DK, KL, & AG, AH, AK, AL jungantur. Quoniam igitur CB, BG, GH inter ſe æquales ſunt, erunt, & triangula AHG, AGB, ABC inter ſe æqualia; (1) ergo quotuplex eſt baſis HC ipſius BC baſis, totuplex eſt AHC triangulum trianguli ABC. Eadem ratione quotuplex eſt LC baſis, ipſius baſis CD, totuplex eſt, & triangulum ALC ipſius ACD trianguli: & ſi æqualis

(1) 38. primi.

lis eſt HC baſis baſi CL, & triangulũ AHC triangulo ALC eſt æquale: & ſi baſis HC baſim CL ſuperat, & triangulũ AHC ſuperabit triangulum ALC:



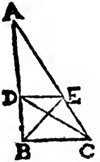
& ſi minor, minus. Quatuor igitur magnitudinibus exiſtentibus, videlicet duabus baſibus BC, CD, & duobus triangulis ABC, ACD, ſumpta ſunt æque multiplicia, baſis quidem BC, & ABC trianguli, videlicet baſis HC, & AHC triangulum: baſis vero CD, & trianguli ACD, alia utcumque æque multiplicia, nempè CL baſis, & ALC triangulum; atque oſtenſum eſt ſi HC baſis baſim CL ſuperat, & triangulum AHC ſuperare triangulum ALC; & ſi æqualis, æquale; & ſi minor, minus; (2) eſt igitur, ut BC baſis ad baſim CD, ita triangulum ABC ad ACD triangulum. Et quoniam trianguli ABC duplum eſt parallelogrammum EC, (3) & trianguli ACD parallelogrammum FC duplum: partes autem eodem modo multiplicium eandem inter ſe proportionem habent, (4) erit, ut ABC triangulum ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammum. Quoniam igitur oſtenſũ eſt,

(2) 5. diff. quinti. (3) 41. primi. (4) 15. quinti.

eſt, ut baſis BC ad CD baſim, ita eſſe ABC triangulum ad triangulum ACD; ut autem ABC triangulū ad triangulum ACD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammū erit, ut BC baſis ad baſim CD, ita parallelogrammum EC ad CF parallelogrammū. (5) Quare triangula, & parallelogramma, quæ eandem habent altitudinem inter ſe ſunt, ut baſes; quod demonſtrare oportebat.

(5) 11. quinti.

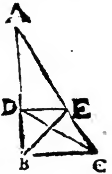
Theorema 2. Propoſitio 2. Si uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera; & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit.



TRianguli enim ABC uni laterum BC parallela ducatur DE. Dico, ut BD ad DA, ita eſſe CE ad EA. Iungantur enim BE, CD; triangulum igitur BDE triangulo CDE eſt æquale; in eadem enim ſunt baſi DE, & in eiſdem DE, BC parallelis; (1) aliud autem triangulum eſt ADE: ſed æqualia ad idem eandem habent proportionē; (2) ergo, ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita eſt CDE triangulum ad triangulum ADE. ut autem triangulum BDE ad triangulum ADE, ita eſt BD ad

O DA;

(1) 37. primi. (2) 7. quinti.

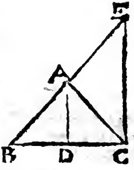


DA; nam cũ eandem altitudinem habeant, videlicet perpendicularē à pũcto E ad AB ductam, inter ſe ſunt, uti baſes; (3) & ob eandem cauſam, ut CDE triãgulum ad triangulum ADE, ita CE ad EA. (4) Et ut igitur BD ad DA, ita eſt CB ad EA. Sed trianguli ABC latera AB, AC proportionaliter ſecta ſint, & ut BD ad DA, ita ſit CE ad EA: & jungantur DE. Dico DE ipſi BC parallelã eſſe; iiſdem enim conſtructis, quoniam eſt, ut BD ad DA, ita CE ad EA; ut autem BD ad DA, ita eſt BDE triangulum ad triangulum ADE; & ut CE ad EA, ita CDE triangulum ad triangulum ADE: erit, ut triangulum BDE ad triangulum ADE, ita CDE triangulum ad triangulum ADE. (5) Quod cum utrumque triangulorum BDE, CDE ad triangulum ADE eandem habeat proportionem; erit BDE triangulum triangulo CDE æquale; (6) & ſunt in eadem baſi DE; æqualia autem triangula, & in eadem baſi conſtituta, etiam in eiſdem ſunt parallelis; (7) ergo DE ipſi BC parallela eſt. Si igitur uni laterum trianguli parallela quædam recta linea ducta fuerit, proportionaliter ſecabit ipſius trianguli latera: & ſi trianguli latera proportionaliter ſecta fuerint, quæ ſectiones conjungit recta linea reliquo trianguli lateri parallela erit; quod oportebat demonſtrare.

Theo-

(3) Ex antecedente. (4) 11.quinti. (5) 11.quinti. (6) 9.quinti. (7) 40.primi.

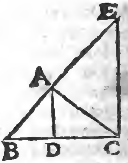
Theorema 3. Propoſitio 3. Si trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea, ſecet etiã baſim; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea, trianguli angulum bifariam ſecabit.



Sit triangulum ABC, & ſecetur angulus BAC bifariam recta linea AD. (1) dico, ut BD ad DC, ita eſſe BA ad AC; ducatur enim per C ipſi DA parallela CE, (2) & producta BA conveniat cum ipſa in E pũcto. Quoniam igitur in parallelas AD, EC incidit recta linea quædam AC, erit ACE angulus angulo CAD æqualis. (3) Sed CAD angulus ponitur æqualis angulo BAD. Ergo, & BAD ipſi ACE angulo ęqualis erit. Rurſus quoniam in parallelas AD, EC recta linea BAE incidit, exterior angulus BAD æqualis eſt interiori AEC; oſtenſus autem eſt, & angulus ACE angulo BAD æqualis; ergo, & ACE ipſi AEC æqualis erit: ac propterea latus AE æquale lateri AC. (4) Et quoniã uni laterum trianguli BCE, videlicet ipſi EC parallela ducta eſt AD; erit, ut BD ad DC, ita BA ad AE; (5) æqualis autem eſt AE ipſi AC; eſt igitur, ut BD ad DC, ita BA ad AC. (6) Sed

 ſit,

(1) 9.primi. (2) 31.primi. (3) 29.primi.
(4) 6.primi. (5) Ex antecedente. (6) 7.quinti.



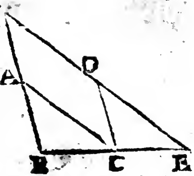
ſit, ut BD ad DC, ita BA ad AC, & AD jungatur. Dico angulum BAC bifariam ſectum eſſe recta linea AD; iiſdem enim conſtructis quoniam eſt, ut BD ad DC, ita BA ad AC; Sed, & ut BD ad DC, ita BA ad AE, etenim uni laterum trianguli BCE, videlicet ipſi EC parallela ducta eſt AD, (7) erit, & ut BA ad AC, ita BA ad AE; ergo AC eſt æqualis AE, (8) ac propterea, & angulus AEC angulo ECA æqualis. Sed angulus quidem AEC eſt æqualis angulo exteriori BAD; angulus vero ACE æqualis alterno CAD; (9) quare, & BAD angulus ipſi CAD æqualis erit; angulus igitur BAC bifariam ſectus eſt recta linea AD. Ergo ſi trianguli angulus bifariam ſecetur, ſecans autem angulum recta linea, etiam baſim ſecet; baſis partes eandem proportionem habebunt, quam reliqua trianguli latera: & ſi baſis partes eandem proportionem habeant, quam reliqua trianguli latera, quæ à vertice ad ſectionem ducitur recta linea trianguli angulum bifariam ſecabit. Quod oportebat demonſtrare.

(7) Ex antecedente. (8) 9. quinti. (9) 29. primi.

Theorema 4. Propoſitio 4. Æquiangulorum triangulorũ latera, quæ circum æquales angulos, proportionalia ſunt, & homologa, ſivè ejuſdem rationis ſunt latera, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur.

Sint æquiangula triangula ABC, DCE, quæ angulum qui-

quidē ABC angulo DCE, angulum vero ACB angulo DEC ęqualem habeant, & præterea angulum BAC angulo CDE. Dico triangulorum ABC, DCE proportionalia eſſe latera, quę ſunt circa æquales angulos, & homologa, ſivè ejuſdē rationis latera eſſe, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Ponatur enim BC in directum ipſi CE.

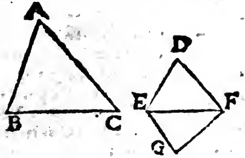


Et quoniam anguli ABC, ACB duobus rectis minores ſunt, (1) æqualis autem eſt angulus ACB angulo DEC; erunt ABC, DEC anguli duobus rectis minores; quare BA, ED productæ inter ſe convenient; producantur, & conveniant in puncto F; & quoniam angulus DCE eſt æqualis angulo ABC, erit BF ipſi DC parallela. (2) Rurſus quoniam æqualis eſt angulus ACB angulo DEC, parallela erit AC ipſi FE; parallelogrammum igitur eſt FACD; ac propterea FA quidem ipſi CD, AC vero ipſi FD eſt æqualis. (3) Et quoniam uni laterum trianguli FBE, videlicet ipſi FE parallela ducta eſt AC; erit, ut BA ad AF, ita BC ad CE; (4) æqualis autem eſt AF ipſi CD. ut igitur BA ad CD; ita BC ad CE, (5) & permutando, ut AB ad BC, ita DC ad CE; rurſus quoniam CD parallela eſt BF, erit, ut BC ad CE, ita FD ad DE. (6)

(1) 17. primi. (2) 28. primi. (3) 34. primi. (4) 2. hujus. (5) 7. quinti. (6) 2. hujus.

Sed DF eſt æqualis AC; ergo, ut BC ad CE, ita AC ad ED; permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. Itaque quoniam oſtenſum eſt, ut AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED: erit ex æquali, ut BA ad AC, ita CD ad DE; æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa, ſivè ejuſdem rationis latera ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Quod demonſtrare oportebat.

Theorema 5. Propoſitio 5. Si duo triangula latera proportionalia habeãt, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ latera proportionalia habeant, ſitque, ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF, ut autem BC ad CA, ita EF ad FD. & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiãgulum eſſe, & æquales habere angulos quibus homologa latera ſubtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & præterea angulum BAC angulo EDF. conſtituatur enim ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipſa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo

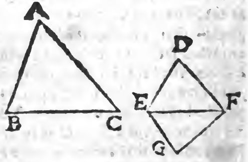
autem

autem BCA angulus EFG. (1) Quare reliquus BAC angulus reliquo EGF eſt æqualis. Ideòque æquiangulum eſt triangulum ABC triangulo EGF; triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa latera ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; (2) ergo, ut AB ad BC, ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. Ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF (3) Quod cum utraque ipſarum DE, EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipſi EG æqualis. (4) Eadem ratione, & DF æqualis FG. Itaque quoniam DE eſt æqualis FG, communis autem EF; duę DE, EF duabus GE, EF æquales ſunt, & baſis DF baſi FG ęqualis; angulus igitur DEF eſt ęqualis angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFE eſt æqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF Et quoniam angulus FED eſt æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit, & angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB æqualis eſt angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D: ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triãgula latera proportionalia habeant, æquiangula erũt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oportebat demonſtrare.

(1) 32. primi. (2) Ex antecedente. (3) 11. quinti (4) 9. quinti. (5) 8. primi.

Sed DF eſt æqualis AC; ergo, ut BC ad CE, ita AC ad ED; permutando igitur, ut BC ad CA, ita CE ad ED. Itaque quoniam oſtenſum eſt, ut AB ad BC, ita DC ad CE, ut autem BC ad CA, ita CE ad ED: erit ex æquali, ut BA ad AC, ita CD ad DE; æquiangulorum igitur triangulorum proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa, ſivè ejuſdem rationis latera ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur. Quod demonſtrare oportebat.

Theorema 5. Propoſitio 5. Si duo triangula latera proportionalia habeãt, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF, quæ latera proportionalia habeant, ſitque, ut AB quidem ad BC, ita DE ad EF, ut autem BC ad CA, ita EF ad FD, & adhuc ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulum ABC triangulo DEF æquiãgulum eſſe, & æquales habere angulos quibus homologa latera ſubtenduntur, angulum quidem ABC angulo DEF, angulum vero BCA angulo EFD, & prætereà angulum BAC angulo EDF. conſtituatur enim ad rectam lineam EF, & ad puncta in ipſa EF, angulo quidem ABC æqualis angulus FEG; angulo

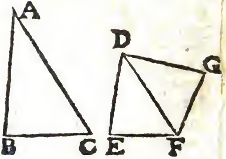
autem

Digitized by Google

autem BCA angulus EFG. (1) Quare reliquus BAC angulus reliquo EGF eſt æqualis. Ideòque æquiangulum eſt triangulum ABC triangulo EGF; triangulorum igitur ABC, EGF proportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, & homologa latera ſunt, quæ æqualibus angulis ſubtenduntur; (2) ergo, ut AB ad BC, ita GE ad EF. Sed ut AB ad BC, ita DE ad EF. Ut igitur DE ad EF, ita GE ad EF (3) Quod cum utraque ipſarum DE, EG ad EF eandem proportionem habeat, erit DE ipſi EG æqualis. (4) Eadem ratione, & DF æqualis FG. Itaque quoniam DE eſt æqualis FG, communis autem EF; duę DE, EF duabus GE, EF æquales ſunt, & baſis DF baſi FG ęqualis; angulus igitur DEF eſt ęqualis angulo GEF, & DEF triangulum æquale triangulo GEF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, quibus æqualia latera ſubtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFE eſt æqualis angulo GFE, angulus vero EDF æqualis angulo EGF Et quoniam angulus FED eſt æqualis angulo GEF, & angulus GEF angulo ABC, erit, & angulus ABC angulo FED æqualis. Eadem ratione, & angulus ACB æqualis eſt angulo DFE, & adhuc angulus ad A angulo ad D: ergo ABC triangulum triangulo DEF æquiangulum erit. Si igitur duo triãgula latera proportionalia habeant, æquiangula erũt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oportebat demonſtrare.

(1) 32.primi. (2) Ex antecedente. (3) 11.quinti (4) 9.quinti. (5) 8.primi.

Theorema 6. Propoſitio 6. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autẽ angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triãgula, & æquales habebunt angulos, quibus æqualia latera ſubtenduntur.



Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habẽtia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ſitque ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulũ ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulũ vero ACB angulo DFE. conſtituatur enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipſa DF, alterutri angulorum BAC, EDF æqualis angulus FDG, angulo autẽ ACB æqualis DFG; (1) reliquus igitur, qui ad B reliquo, qui ad G eſt æqualis; ergo triangulum ABC triangulo DGF, æquiangulum eſt, ac proptereà, ut BA ad AC, ita eſt GD ad DF: (2) ponitur autem, & ut BA ad AC, ita ED ad DF. Ut igitur ED ad DF, ita GD ad DF; (3) quare ED æqualis eſt ipſi DG, (4) & com-

(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 11. quinti. (4) 9. quinti.

Digitized by Google

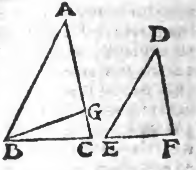
& communis DF; ergo duæ ED, DF duabus GD, DF æquales ſunt, & angulus EDF angulo GDF eſt æqualis; baſis igitur EF eſt æqualis baſi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFG eſt æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. Sed angulus DFG ęqualis eſt angulo ACB; & angulus igitur ACB angulo DFE eſt æqualis: ponitur autem, & BAC angulus æqualis angulo EDF; ergo, & reliquus, qui ad B æqualis reliquo, qui ad E; æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula unum angulũ uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oſtendere oportebat.

---

(5) 4. primi.

Theorema 7. Propoſitio 7. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque ſimul, vel minorẽ, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

Sint duo triangula ABC, DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos



los ABC, DEF latera proportionalia, ut ſit DE ad EF, ſicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C, F, primũ utrumque ſimul minorem recto. Dico triangulũ ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, angulũque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æqualẽ. Si enim inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF, unus ipſorum major erit. Sit major ABC: & conſtituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqualis angulus ABG. (1) Et quoniã angulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF, erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis; æquiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; quare, ut AB ad BG, ſic DE ad EF: (2) utque DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC; & ut igitur AB ad BC, ſic AB ad BG. Quod cum AB ad utramque BC, BG eandem habeat proportionem, erit BC ipſi BG æqualis: (3) ac propterea angulus ad C eſt æqualis angulo BGC, (4) minor autem recto ponitur angulus, qui ad C; ergo, & BGC minor eſt recto, & ob id qui ei deinceps eſt AGB major recto; (5) atque oſtenſus eſt angulus AGB æqualis angulo, qui ad F, angulus igitur, qui ad F recto major eſt; atqui po-

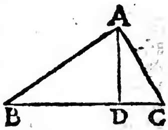
(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 9. quinti. (4) 5. primi. (5) 13. primi.

ponitur minor recto, quod eſt abſurdum; non igitur inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF; ergo ipſi eſt æqualis; eſt autem & angulus ad A æqualis ei, qui ad D, quare, & reliquus, qui ad C æqualis reliquo, qui ad F; æquiangulum igitur eſt ABC triangulum triangulo DEF. Sed rurſus ponatur uterque angulorum, qui ad C, F non minor recto. Dico rurſus & ſic, triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter demonſtrabimus BC æqualem ipſi BG, angulumque ad C angulo BGC æqualem; ſed angulus qui ad C non eſt minor recto, non minor igitur recto eſt BGC; quare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis minores, quod fieri non poteſt; (6) non igitur rurſus inæqualis eſt ABC angulus angulo DEF; ergo æqualis neceſſario erit; eſt autem, & qui ad A æqualis ei, qui ad D; reliquus igitur, qui ad C reliquo, qui ad F eſt æqualis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſt. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia ſũt latera, Quod oportebat demonſtrare.

Theo-

(6) 17. primi.

Theorema 8. Propoſitio 8. Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.



SIt triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD, ADC toti triãgulo ABC, & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus BAC eſt æqualis angulo ADB, rectus enim uterque eſt, & angulus, qui ad B communis duobus triãgulis ABC, ABD erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis; æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD; quare, ut BC, quæ ſubtendit angulum rectum trianguli ABC ad BA ſubtendentem angulum rectum trianguli ABD, ſic ipſa AB ſubtendẽs angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD ſubtendentem angulum æqualem angulo qui ad C, videlicet BAD ipſius ABD trianguli: & adhuc AC ad AD ſubtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis; ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum eſt, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: (1) Simile igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD. (2) Eadem ratione demon-

(1) 4.hujus. (2) 1.diff.hujus.

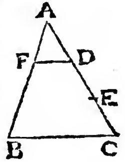
monſtrabimus etiã ADC triangulum triangulo ABC ſimile eſſe. Quare utrumque ipſorum ABD, ADC toti ABC triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula ABD, ADC etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus BDA rectus, eſt æqualis recto ADC. Sed, & BAD oſtenſus eſt æqualis ei, qui ad C, erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis; æquiangulum igitur eſt triangulum ABD triangulo ADC; ergo, ut BD trianguli ABD ſubtendens BAD angulũ, ad DA trianguli ADC ſubtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, ſic ipſa AD trianguli ABD ſubtendens angulum, qui ad B, ad DC ſubtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: & adhuc BA ad AC ſubtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur eſt ABD triangulum ttiangulo ADC. Quare ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur, quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe, ſimilia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; ductam baſis partium mediam proportionalem eſſe, & adhuc baſis, & uniuſcujuſque partium latus, quod ad partem, medium eſſe proportionale. Quod demonſtrare oportebat.

Pro-

Problema 1. Propoſitio 9. A data recta linea imperatam partem abſcindere.



Sit data recta linea AB, oportet ab ipſa AB imperatam partē abſcindere Imperetur pars tertia, & ducatur à puncto A quædam recta linea AC, quæ cum ipſa AB angulum quemlibet contineat; ſumaturque in AC, quodvis punctum D, & ipſi AD æquales ponantur DE, EC, deinde jungatur BC, & per D ipſi BC parallela ducatur DF. Itaque quoniam uni laterum trianguli ABC, videlicet ipſi BC parallela ducta eſt FD; erit, ut CD ad DA, ita BF ad FA; (1) dupla autem eſt CD ipſius DA; ergo, & BF ipſius FA dupla erit; tripla igitur eſt BA ipſius AF. Quare à data recta linea AB imperata tertia pars AF abſciſſa eſt. Quod facere oportebat.

(1) 2. hujus.

Problema 2. Propoſitio 10. Datam rectam lineam inſectam, data recta linea ſecta ſimiliter ſecare.

Sit data quidem recta linea inſecta AB, ſecta vero AC; oportet rectam lineam AB inſectam ipſi AC ſectæ ſimiliter ſecare. Sit ſecta AC in punctis D, E, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant, juncta-

ctaquè BC per puncta, quidem D,E ipſi BC parallelæ ducantur DF, EG: per D vero, ipſi AB ducatur parallela DHK; parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum FH, HB: ac propterea DH quidem eſt æqualis FG, HK vero ipſi GB (1) Et quoniã uni laterum trianguli DKC, ipſi ſcilicet KC parallela ducta eſt HE; erit

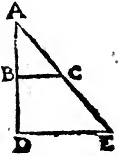


ut CE ad ED, ita KH ad HD; (2) æqualis autem eſt KH quidem ipſi BG, HD vero ipſi GF, eſt igitur, ut CE ad ED, ita BG ad GF. Rurſus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipſi EG parallela ducta eſt FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed oſtenſũ eſt, ut CE ad ED, ita eſſe BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita eſt BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea inſecta AB datæ rectæ lineæ ſectæ AC ſimiliter ſecta eſt. Quod facere oportebat.

(1) 34. primi. (2) 2. hujus.

Problema 3. Propoſitio 11. Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

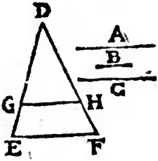
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; oportet ipſarum AB, AC tertiam proportionalem invenire; producantur enim AB, AC ad puncta D, E: ponaturque ipſi AC æqualis BD, & juncta BC, ducatur per D ipſi BC parallela DE;



quo-

quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipſi DE parallela ducta eſt BC, erit, ut AB ad BD, ita AC ad CE; æqualis autem eſt BD ipſi AC; ut igitur BA ad AC, ita eſt AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB, AC tertia proportionalis inventa eſt CE. Quod facere oportebat.

Problema 4. Propoſitio 12. Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

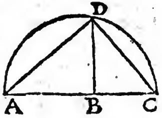


Sint datæ tres rectæ lineæ A, B, C oportet ipſarũ A, B C, quartã proportionalem invenire. Exponantur duæ rectę lineæ DE, DF angulũ quemvis EDF continentes: & ponatur ipſi quidem A æqualis DG, ipſi vero B æqualis GE, & ipſi C æqualis DH: junctaque GH per E ipſi parallela ducatur EF. Itaq; quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt GH. erit, ut DG ad GE, ita DH ad HF; (1) eſt autẽ DG ipſi A æqualis; GE vero æqualis B:& DH æqualis C Ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A, B, C quarta proportionalis inventa eſt HF. Quod facere oportebat.

Pro-

(1) 2. hujus.

Problema 5. Propoſitio 13. Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.



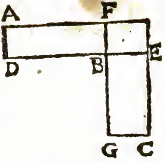
Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, BC, oportet ipſarum AB, BC mediam proportionalē invenire; ponātur in directum, & in ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC, ducaturque à puncto B ipſi AC ad rectos angulos BD, & AD, DC jungantur. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt angulus ADC, is rectus eſt; (1) & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt DB, erit DB baſis partium AB, BC media proportionalis. (2) Duabus igitur datis rectis lineis AB, BC média proportionalis inventa eſt DB. Quod facere oportebat.

---

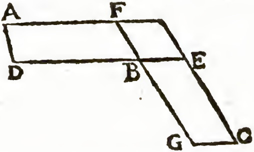
(1) 31.tertii. (2) cor.8.hujus.

Theorema 9. Propoſitio 14. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: & quorum parallelogrammorum uni æqualēm habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia.

Sint æqualia parallelogramma AB, BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum



DB, BE; ergo, & in directum erunt FB, BG. Dico parallelogrammorum AB, BC latera, quæ ſunt circum æquales angulos ex cõtraria parte ſibi ipſis reſpondere: hoc eſt, ut DB ad BE, ita eſſe GB ad BF; compleatur enim parallelogrammum FE; & quoniam parallelogrammum AB æquale eſt parallelogrammo BC; aliud autem aliquod eſt FE parallelogrāmmum, erit, ut AB ad FE, ita BC ad FE. (1) Sed, ut AB quidem ad FE, ita eſt DB ad BE; (2) ut autem BC ad FE, ita GB ad BF; & ut igitur DB ad BE, ità GB ad BF; (3) ergo parallelogrāmorum AB, BC latera, quæ circũ æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeāt latera, quæ circum æquales angulos, ſitquè, ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale eſſe. Quoniam enim eſt, ut DB ad BE, ita GB ad BF, (4) ut autem DB ad BE, ita



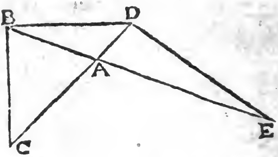
(1) 7.quinti. (2) 1.hujus. (3) 11.quinti.
(4) 11.quinti.

ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE, (5) & ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit, & ut AB ad FE, ita BC ad FE; æquale igitur eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC; (6) ergo æqualium, ut unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

(5) 1.hujus. (6) 9.quinti.

Theorema 10. *Propoſitio* 15. *Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.*

SInt æqualia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum ſcilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere, hoc eſt, ut CA ad AD, ita eſſe EA ad AB; ponantur enim ita, ut in directum ſit CA ipſi AD; ergo, & EA ipſi AB in directum



erit; (1) & jũgatur BD. Quoniam igitur triangulũ ABC ęquale eſt triãgulo ADE, aliud autem eſt ABD; erit, ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum ADE ad triangulum BAD. (2) Sed, ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD, (3) ut autem triangulum EAD ad ipſum BAD, ita EA ad AB; & ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB. (4) Quare triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera triangulorum ABC, ADE: & ſit, ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale eſſe. Iuncta enim rurſus BD, quoniam, ut CA ad AD, ita eſt EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum, erit, ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Utrumque igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale eſt

ABC

(1) 14.primi. (2) 7.quinti. (3) 1.hujus.
(4) 11.quinti.

ABC triangulum triangulo ADE; (5) æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

---

(5) 9. quinti.

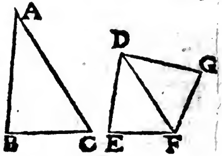
Theorema 11. *Propoſitio* 16.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale eſt ei rectangulo, quod mediis continetur; & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F, ſitque, ut AB ad CD: ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB, F æquale eſſe ei, quod ipſis CD, E continetur. Ducantur enim à punctis A, C ipſis AB, CD ad rectos angulos AG, CH: ponaturque ipſi quidem F æqualis AG: ipſi vero E æqualis CH, & compleatur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur eſt, ut AB ad CD, ita E ad F; eſt autem E æqualis CH, & F ipſi AG: erit, ut AB ad CD, ita CH ad AG; parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quæ circum

Theorema 6. Propoſitio 6. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa æquales autē angulos latera proportionalia, æquiangula erunt triāgula, & æquales habebunt angulos, quibus æqualia latera ſubtenduntur. sub ... homolog.

Sint duo triangula ABC, DEF unum angulum BAC uni angulo EDF æqualem habētia, circa æquales autem angulos latera proportionalia, ſitque ut BA ad AC, ita ED ad DF. Dico triangulū



ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, & angulum quidem ABC habere æqualem angulo DEF; angulū vero ACB angulo DFE. conſtituatur enim ad rectam lineam DF, & ad puncta in ipſa DF, alterutri angulorum BAC, EDF æqualis angulus FDG, angulo autē ACB æqualis DFG; (1) reliquus igitur, qui ad B reliquo, qui ad G eſt æqualis; ergo triangulum ABC triangulo DGF, æquiangulum eſt, ac propterea, ut BA ad AC, ita eſt GD ad DF: (2) ponitur autem, & ut BA ad AC, ita ED ad DF. Ut igitur ED ad DF, ita GD ad DF; (3) quare ED æqualis eſt ipſi DG, (4) & com-

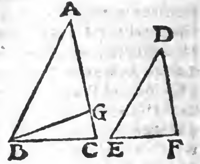
(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 11. quinti.
(4) 9. quinti.

& communis DF; ergo duæ ED, DF duabus GD, DF æquales ſunt, & angulus EDF angulo GDF eſt æqualis; baſis igitur EF eſt æqualis baſi FG, triangulumque DEF æquale triangulo GDF, & reliqui anguli reliquis angulis æquales, alter alteri, quibus æqualia latera ſubtenduntur; (5) ergo angulus quidem DFG eſt æqualis angulo DFE; angulus vero ad G angulo ad E. Sed angulus DFG æqualis eſt angulo ACB; & angulus igitur ACB angulo DFE eſt æqualis: ponitur autem, & BAC angulus æqualis angulo EDF; ergo, & reliquus, qui ad B æqualis reliquo, qui ad E; æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo DEF. Quare ſi duo triangula unum angulũ uni angulo æqualem habeant, circa æquales autem angulos latera proportionalia; æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, quibus homologa latera ſubtenduntur. Quod oſtendere oportebat.

(5) 4. primi.

Theorema 7. Propoſitio 7. Si duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque ſimul, vel minorẽ, vel non minorem recto, æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos latera ſunt proportionalia.

SInt duo triangula ABC, DEF, unum angulum uni angulo æqualem habentia, videlicet angulum BAC angulo EDF æqualem, circa alios autem angulos



los ABC, DEF latera proportionalia, ut ſit DE ad EF, ſicut AB ad BC: & reliquorum qui ad C, F, primũ utrumque ſimul minorem recto. Dico triangulũ ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe, angulũque ABC æqualem angulo DEF, & reliquum videlicet qui ad C reliquo qui ad F æquale. Si enim inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF, unus ipſorum major erit. Sit major ABC: & conſtituatur ad rectam lineam AB, & ad punctum in ipſa B angulo DEF æqualis angulus ABG. (1) Et quoniã angulus quidem A eſt æqualis angulo D, angulus vero ABG angulo DEF, erit reliquus AGB reliquo DFE æqualis; æquiangulum igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; quare, ut AB ad BG, ſic DE ad EF: (2) utque DE ad EF, ſic ponitur AB ad BC; & ut igitur AB ad BC, ſic AB ad BG. Quod cum AB ad utramque BC, BG eandem habeat proportionem, erit BC ipſi BG æqualis: (3) ac propterea angulus ad C eſt æqualis angulo BGC, (4) minor autem recto ponitur angulus, qui ad C; ergo, & BGC minor eſt recto, & ob id qui ei deinceps eſt AGB major recto; (5) atque oſtenſus eſt angulus AGB æqualis angulo, qui ad F, angulus igitur, qui ad F recto major eſt; atqui po-

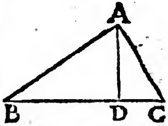
(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 9. quinti.
(4) 5. primi. (5) 13. primi.

ponitur minor recto, quod eſt abſurdum; non igitur inæqualis eſt angulus ABC angulo DEF; ergo ipſi eſt æqualis; eſt autem & angulus ad A æqualis ei, qui ad D, quare, & reliquus, qui ad C æqualis reliquo, qui ad F; æquiangulum igitur eſt ABC triangulum triangulo DEF. Sed rurſus ponatur uterque angulorum, qui ad C, F non minor recto. Dico rurſus & ſic, triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſſe. Iiſdem enim conſtructis ſimiliter demonſtrabimus BC æqualem ipſi BG, angulumque ad C angulo BGC æqualem; ſed angulus qui ad C non eſt minor recto, non minor igitur recto eſt BGC; quare trianguli BGC duo anguli non ſunt duobus rectis minores, quod fieri non poteſt; (6) non igitur rurſus inæqualis eſt ABC angulus angulo DEF; ergo æqualis neceſſario erit; eſt autem, & qui ad A æqualis ei, qui ad D; reliquus igitur, qui ad C reliquo, qui ad F eſt æqualis; ac propterea triangulum ABC triangulo DEF æquiangulum eſt. Si igitur duo triangula unum angulum uni angulo æqualem habeant, circa alios autem angulos latera proportionalia, & reliquorum utrumque ſimul, vel minorem, vel non minorem recto: æquiangula erunt triangula, & æquales habebunt angulos, circa quos proportionalia sũt latera, Quod oportebat demonſtrare.

Theo-

(6) 17. primi.

Theorema 8. Propoſitio 8. Si in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.



SIt triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC, & à puncto A ad BC perpendicularis ducatur AD. Dico triangula ABD, ADC toti triãgulo ABC, & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus BAC eſt æqualis angulo ADB, rectus enim uterque eſt, & angulus, qui ad B communis duobus triãgulis ABC, ABD erit reliquus ACB reliquo BAD æqualis; æquiangulum igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD; quare, ut BC, quæ ſubtendit angulum rectum trianguli ABC ad BA ſubtendentem angulum rectum trianguli ABD, ſic ipſa AB ſubtendẽs angulum qui ad C trianguli ABC, ad BD ſubtendentem angulum æqualem angulo qui ad C, videlicet BAD ipſius ABD trianguli: & adhuc AC ad AD ſubtendentem angulum qui ad B, communem duobus triangulis; ergo triangulum ABC triangulo ABD æquiangulum eſt, & circa æquales angulos latera habet proportionalia: (1) Simile igitur eſt triangulum ABC triangulo ABD. (2) Eadem ratione demon-

(1) 4. hujus. (2) 1. diff. hujus.

monſtrabimus etiã ADC triangulum triangulo ABC ſimile eſſe. Quare utrumque ipſorum ABD, ADC toti ABC triangulo eſt ſimile. Dico inſuper triangula ABD, ADC etiam inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim angulus BDA rectus, eſt æqualis recto ADC. Sed, & BAD oſtenſus eſt æqualis ei, qui ad C, erit reliquus qui ad B reliquo DAC æqualis; æquiangulum igitur eſt triangulum ABD triangulo ADC; ergo, ut BD trianguli ABD ſubtendens BAD angulũ, ad DA trianguli ADC ſubtendentem angulum, qui ad C, æqualem angulo BAD, ſic ipſa AD trianguli ABD ſubtendens angulum, qui ad B, ad DC ſubtendentem angulum DAC ei, qui ad B, æqualem: & adhuc BA ad AC ſubtendentem angulum rectum ADC. Simile igitur eſt ABD triangulum ttiangulo ADC. Quare ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur, quæ ad perpendicularem ſunt triangula, & toti, & inter ſe, ſimilia ſunt. Quod oportebat demonſtrare.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi in triangulo rectangulo ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducatur; ductam baſis partium mediam proportionalem eſſe, & adhuc baſis, & uniuſcujuſque partium latus, quod ad partem, medium eſſe proportionale. Quod demonſtrare oportebat.

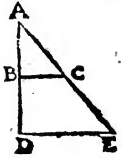
Pro-



ctaquè BC per puncta, quidem D,E ipſi BC parallelæ ducantur DF, EG: per D vero, ipſi AB ducatur parallela DHK; parallelogrammum igitur eſt utrumque ipſorum FH, HB: ac propterea DH quidem eſt æqualis FG, HK vero ipſi GB (1) Et quoniã uni laterum trianguli DKC, ipſi ſcilicet KC parallela ducta eſt HE; erit ut CE ad ED, ita KH ad HD; (2) æqualis autem eſt KH quidem ipſi BG, HD vero ipſi GF, eſt igitur, ut CE ad ED, ita BG ad GF. Rurſus quoniam uni laterum trianguli AGE, nimirum ipſi EG parallela ducta eſt FD, ut ED ad DA, ita erit GF ad FA. Sed oſtenſũ eſt, ut CE ad ED, ita eſſe BG ad GF; ut igitur CE ad ED, ita eſt BG ad GF, & ut ED ad DA, ita GF ad FA. Ergo data recta linea inſecta AB datæ rectæ lineæ ſectæ AC ſimiliter ſecta eſt. Quod facere oportebat.

(1) 34. primi. (2) 2. hujus.

Problema 3. Propoſitio 11. Duabus datis rectis lineis tertiam proportionalem invenire.

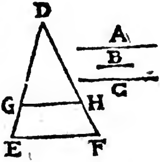


Sint datæ duæ rectæ lineæ AB, AC, & ponantur ita, ut angulum quemvis contineant; oportet ipſarum AB, AC tertiam proportionalem invenire; producantur enim AB, AC ad puncta D, E: ponaturque ipſi AC æqualis BD, & juncta BC, ducatur per D ipſi BC parallela DE;

quo-

quoniam igitur uni laterum trianguli ADE, videlicet ipſi DE parallela ducta eſt BC, erit, ut AB ad BD, ita AC ad CE; æqualis autem eſt BD ipſi AC; ut igitur BA ad AC, ita eſt AC ad CE. Quare datis rectis lineis AB, AC tertia proportionalis inventa eſt CE. Quod facere oportebat.

Problema 4. Propoſitio 12. Tribus datis rectis lineis quartam proportionalem invenire.

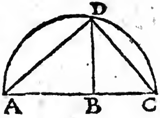


Sint datæ tres rectæ lineæ A,B,C oportet ipſarū A,B C, quartā proportionalem invenire. Exponantur duæ rectę lineæ DE, DF angulū quemvis EDF continentes: & ponatur ipſi quidem A æqualis DG, ipſi vero B æqualis GE, & ipſi C æqualis DH: junctaque GH per E ipſi parallela ducatur EF. Itaq; quoniam uni laterum trianguli DEF, nimirum ipſi EF parallela ducta eſt GH. erit, ut DG ad GE, ita DH ad HF; (1) eſt autē DG ipſi A æqualis; GE vero æqualis B:& DH æqualis C Ut igitur A ad B, ita C ad HF. Quare datis tribus rectis lineis A,B,C quarta proportionalis inventa eſt HF. Quod facere oportebat.

Pro-

(1) 2. hujus.

Problema 5. Propoſitio 13. Duabus datis rectis lineis mediam proportionalem invenire.

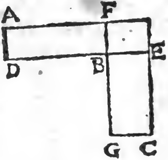


SInt datæ duæ rectæ lineæ AB, BC, oportet ipſarum AB, BC mediam proportionalē invenire; ponãtur in directum, & in ipſa AC deſcribatur ſemicirculus ADC, ducaturque à puncto B ipſi AC ad rectos angulos BD, & AD, DC jungantur. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt angulus ADC, is rectus eſt; (1) & quoniam in triangulo rectangulo ADC ab angulo recto ad baſim perpendicularis ducta eſt DB, erit DB baſis partium AB, BC media proportionalis. (2) Duabus igitur datis rectis lineis AB, BC media proportionalis inventa eſt DB. Quod facere oportebat.

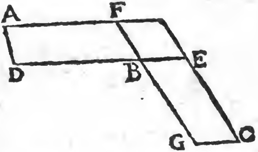
(1) 31.tertii. (2) cor.8.hujus.

Theorema 9. Propoſitio 14. Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent: & quorum parallelogrammorum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; ea inter ſe ſunt æqualia.

SInt æqualia parallelogramma AB, BC, æquales habentia angulos ad B, & ponantur in directum



DB, BE; ergo, & in directum erunt FB, BG. Dico parallelogrammorum AB, BC latera, quæ ſunt circum æquales angulos ex cõtraria parte ſibi ipſis reſpondere: hoc eſt, ut DB ad BE, ita eſſe GB ad BF; compleatur enim parallelogrammum FE; & quoniam parallelogrammum AB æquale eſt parallelogrammo BC; aliud autem aliquod eſt FE parallelogrãmmum, erit, ut AB ad FE, ita BC ad FE. (1) Sed, ut AB quidem ad FE, ita eſt DB ad BE; (2) ut autem BC ad FE, ita GB ad BF; & ut igitur DB ad BE, ita GB ad BF; (3) ergo parallelogrãmorum AB, BC latera, quæ circũ



æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeãt latera, quæ circum æquales angulos, ſitquè, ut DB ad BE, ita GB ad BF. Dico parallelogrammum AB parallelogrammo BC æquale eſſe. Quoniam enim eſt, ut DB ad BE, ita GB ad BF, (4) ut autem DB ad BE, ita

(1) 7.quinti. (2) 1.hujus. (3) 11.quinti.
(4) 11.quinti.

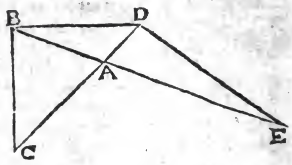
ita AB parallelogrammum ad parallelogrammum FE. (5) & ut GB ad BF, ita BC parallelogrammum ad parallelogrammum FE; erit, & ut AB ad FE, ita BC ad FE; æquale igitur eſt AB parallelogrammum parallelogrammo BC; (6) ergo æqualium, ut unum uni æqualem habentium angulum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum parallelogrammorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod oportebat demonſtrare.

---

(5) 1.hujus. (6) 9.quinti.

Theorema 10. *Propoſitio* 15. *Æqualium, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia.*

Sint æqualia triangula ABC, ADE unum angulum uni angulo æqualem habentia, angulum ſcilicet BAC angulo DAE. Dico triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondere, hoc eſt, ut CA ad AD, ita eſſe EA ad AB; ponantur enim ita, ut in directum ſit CA ipſi AD; ergo, & EA ipſi AB in directum



erit; (1) & iũgatur BD. Quoniam igitur triangulũ ABC ęquale eſt triãgulo ADE, aliud autem eſt ABD; erit, ut CAB triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum ADE ad triangulum BAD. (2) Sed, ut triangulum quidem CAB ad BAD triangulum, ita CA ad AD, (3) ut autem triangulum EAD ad ipſum BAD, ita EA ad AB; & ut igitur CA ad AD, ita EA ad AB. (4) Quare triangulorum ABC, ADE latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. Sed ex contraria parte ſibi ipſis reſpondeant latera triangulorum ABC, ADE: & ſit, ut CA ad AD, ita EA ad AB. Dico triangulum ABC triangulo ADE æquale eſſe. Iuncta enim rurſus BD, quoniam, ut CA ad AD, ita eſt EA ad AB, ut autem CA ad AD, ita ABC triangulum ad triangulum BAD; & ut EA ad AB, ita triangulum EAD ad BAD triangulum, erit, ut ABC triangulum ad triangulum BAD, ita triangulum EAD ad BAD triangulum. Utrumque igitur triangulorum ABC, ADE ad triangulum BAD eandem habet proportionem; ac propterea æquale eſt

ABC

(1) 14. primi. (2) 7. quinti. (3) 1. hujus. (4) 11. quinti.

ABC triangulum triangulo ADE; (5) æqualium igitur, & unum uni æqualem habentium angulum triangulorum latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, & quorum triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia. Quod demonſtrare oportebat.

---

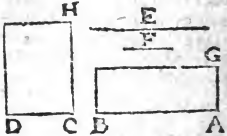
(5) 9. quinti.

Theorema 11. Propoſitio 16.

Si quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale eſt ei rectangulo, quod mediis continetur; & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, E, F, ſitque, ut AB ad CD: ita E ad F. Dico rectangulum contentum rectis lineis AB, F æquale eſſe ei, quod ipſis CD, E continetur. Ducantur enim à punctis A, C ipſis AB, CD ad rectos angulos AG, CH: ponaturque ipſi quidem F æqualis AG: ipſi vero E æqualis CH, & compleätur BG, DH parallelogramma. Quoniam igitur eſt, ut AB ad CD, ita E ad F; eſt autem E æqualis CH, & F ipſi AG: erit, ut AB ad CD, ita CH ad AG; parallelogrammorum igitur BG, DH latera, quæ circum

 æqua-



æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondēt; quoniam autem æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe ſunt æqualia; (1) ergo parallelogrammum BG æquale eſt parallelogrammo DH; atque eſt parallelogrammum quidem BG, quod rectis lineis AB, F continetur; eſt enim AG æqualis F. parallelogrammum vero DH, quod continetur ipſis CD, E, cum CH ipſi E ſit æqualis; rectangulum igitur contentum AB, F eſt æquale ei, quod ipſis CD, E continetur. Sed rectangulum contentum AB, F ſit æquale ei, quod CD, E continetur. Dico quatuor rectas lineas proportionales eſſe, videlicet, ut AB ad CD, ita E ad F; iiſdem enim conſtructis: quoniam rectangulum contentum AB, F eſt æquale ei, quod CD, E continetur, atque eſt contentum quidem AB, F rectangulum BG, etenim AG eſt æqualis F: contentum vero CD, E eſt rectangulum DH, quod CH ipſi E ſit æqualis, erit parallelogrammum BG æquale parallelogrammo DH, & ſunt æquiangula; æqualium autem, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria

(1) 14 hujus.

tia parte ſibi ipſis reſpondent; (2) quare, ut AB ad CD, ita CH ad AG, æqualis autem eſt CH ipſi E, & AG ipſi F. Ut igitur AB ad CD, ita E ad F. Ergo ſi quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale eſt ei, quod mediis continetur: & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

(2) 14 hujus.

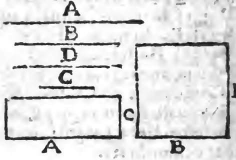
Theorema 12. Propoſitio 17.

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulum extremis contentum æquale eſt ei, quod à media fit, quadrato; & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt tres rectæ lineæ proportionales A,B,C; & ſit, ut A ad B, ita B ad C. Dico rectangulum contentum A, C, æquale eſſe ei, quod à media B fit, quadrato; ponatur ipſi B æqualis D. Et quoniam ut A ad B, ita B ad C, æqualis autem B ipſi D: erit, ut A ad B, ita D ad C, (1) Si autem quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint rectangulum extremis contentum eſt æquale ei, quod medijs continetur; (2)

(1) 7. quinti. (2) Ex antecedenti.

ergo rectangulum A, C cõtentum, eſt æquale ei, quod cõtinetur B, D. Sed rectangulum contẽtũ B, D eſt æquale quadrato, quod fit ex ipſa B; etenim B eſt æqualis

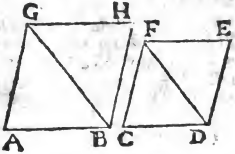


D; rectangulum igitur contentum A, C eſt æquale ei quod ex B fit, quadrato. Sed rectangulum contentum A, C æquale ſit quadrato, quod fit ex B. Dico, ut A ad B, ita eſſe B ad C; iiſdem enim conſtructis: quoniam rectangulum contentum A, C æquale eſt quadrato, quod fit ex B; at quadratum, quod fit ex B eſt rectangulum, quod ipſis B, D continetur, eſt enim B æqualis ipſi D; erit rectangulum contentum A, C æquale ei, quod B, D continetur. Si autem rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod mediis continetur, quatuor rectæ lineæ proportionales erunt; (3) eſt igitur, ut A ad B, ita D ad C: æqualis autem B ipſi D; ergo, ut A ad B, ita B ad C. Si igitur tres rectæ lineæ proportionales fuerint, rectangulũ extremis contentum eſt æquale ei, quod à media fit, quadrato, & ſi rectangulum extremis contentum æquale fuerit ei, quod à media fit, quadrato, tres rectæ lineæ proportionales erunt. Quod oportebat demonſtrare.

3) Ex antecedente.

Problema 6. *Propoſitio* 18. *A data recta linea dato rectilineo ſimile, & ſimiliter poſitũ rectilineum deſcribere.*

SIt data recta linea AB, datum autem rectilineum CE oportet à recta linea AB rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum deſcribere. jungatur DF, & ad



rectam lineam AB, & ad puncta in ipſa A, B, angulo quidem C æqualis angulus conſtituatur GAB, (1) angulo autem CDF angulus ABG; reliquus igitur CFD angulus reliquo AGB eſt æqualis; ergo æquiãgulum eſt FCD triangulum triangulo GAB; ac proptereà, ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB. (2) Rurſus conſtituatur ad rectam lineam BG, & ad puncta in ipſa B, G, angulo quidem DFE æqualis angulus BGH, angulo autem FDE æqualis GBH; ergo reliquus qui ad E, reliquo, qui ad H eſt ęqualis; ęquiãgulum igitur eſt triangulum FDE triangulo GBH. Quare, ut FD ad GB, ita FE ad GH, & ED ad HB; (3) oſtenſum autem eſt, & ut FD ad GB, ita FC ad GA, & CD ad AB; & ut igitur FC ad GA, ita CD ad AB; & FE ad GH, & adhuc ED ad HB; (4) itaque quoniam angulus quidem CFD eſt æqualis angulo AGB; angulus aũt DFE angulo BGH, erit totus CFE an-

(1) 23. primi. (2) 4. hujus. (3) 4. hujus. (5) 11. quinti

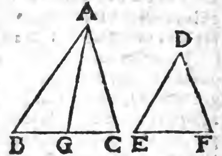
Digitized by Google

angulus toti AGH æqualis. Eadem ratione, & CDE eſt æqualis ipſi ABH, & præterea angulus quidem ad C angulo ad A æqualis, angulus vero ad E angulo ad H; æquiangulum igitur eſt AH ipſi CE, & latera circum æquales ipſi angulos habet proportionalia. Ergo rectilineum AH rectilineo CE ſimile erit. (5) A data igitur recta linea AB dato rectilineo CE ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum AH deſcriptũ eſt. Quod facere oportebat.

(5) diff. 1. hujus.

Theorema 13. Propoſitio 19. Similia triangula inter ſe ſunt in dupla proportione laterum homologorum.

Sint ſimilia triangula ABC, DEF habẽtia angulum ad B æqualem angulo ad E, & ſit, ut AB ad BC, ita DE ad EF, ita ut latus BC homologum ſit lateri EF. Dico ABC triangulum ad triangulum DEF duplam proportionem habere ejus quam habet BC ad EF. Sumatur enim ipſarum BC, EF tertia proportionalis BG, (1) ut ſit, ſicut BC ad EF, ita EF ad BG, & jungatur GA, quoniam igitur, ut AB ad BC, ita eſt



(1) 11. hujus.

eſt DE ad EF; erit permutando, ut AB ad DE, ita BC ad EF. Sed, ut BC ad EF, ita EF ad BG; & ut igitur AB ad DE, ita EF ad BG; (2) quare triangulorum ABG, DEF latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent; quorum autem triangulorum unum uni æqualem habentium angulum latera, quæ circum æquales angulos ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, ea inter ſe æqualia ſunt; (3) æquale igitur eſt ABG triangulum triangulo DEF; & quoniam eſt, ut BC ad EF, ita EF ad BG: ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, prima ad tertiam duplam proportionem habet ejus, quam habet ad ſecundam: (4) habebit BC ad BG duplam proportionem ejus, quam habet BC ad EF. Ut autem BC ad BG, ita ABC triangulum ad triangulum ABG; (5) ergo, & ABC triangulum ad triangulum ABG duplam proportionem habet ejus, quam BC ad EF; eſt autem ABG triangulum triangulo DEF æquale; & triangulum igitur ABC ad triangulum DEF duplam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad EF. Quare ſimilia triangula inter ſe in dupla ſunt proportione laterum homologorũ. Quod oſtendere oportebat.

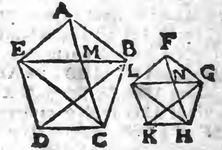
(2) 11. quinti. (3) 15. hujus. (4) Diff. 10. quinti. (5) 1. hujus.

COROLLARIUM.

Ex hoc manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe triãgulum,

lum, quod fit à prima, ad triangulum, quod à ſecunda, ſimile, & ſimiliter deſcriptum, quod oſtenſum eſt, ut CB ad BG, ita ABC triangulum ad triangulũ ABG, hoc eſt ad triangulum DEF; quod oſtendere oportebat.

Theorema 14. Propoſitio 20. Similia polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonum ad polygonum duplam proportionem habet ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus.



SInt ſimilia polygona ABCDE, FGHKL, & ſit AB homologum ipſi FG, dico polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividi, & numero æqualia, & homologa totis; & polygonũ ABCDE ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere ejus, quam habet AB ad FG; jungantur BE, EC, GL, LH; & quoniã ſimile eſt ABCDE polygonũ polygono FGHKL, angulus BAE angulo GFL eſt æqualis: atque eſt, ut BA ad AE, ita GF ad FL. Quoniam igitur duo triangula ſunt ABE, FGL unum angulum uni angulo æqualem habentia; circum æquales autem angulos latera proportionalia; erit triangulum ABE triangulo FGL æquiangulum; (1) ergo, & ſimile; angulus

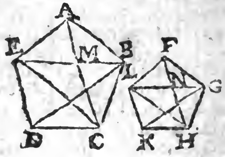
(1) 6. hujus.

lus igitur ABE æqualis eſt angulo FGL; eſt autem, & totus ABC angulus æqualis toti FGH, propter ſimilitudinem polygonorum; ergo reliquus EBC reliquo LGH eſt æqualis; & quoniam ob ſimilitudinem triãgulorum ABE, FGL, eſt ut EB ad BA, ita LG ad GF. Sed, & propter ſimilitudinem polygonorum, ut AB ad BC, ita eſt FG ad GH; erit ex æquali, ut EB ad BC, ita LG ad GH; & circum æquales angulos EBC, LGH latera ſunt proportionalia; æquiangulum igitur eſt EBC triangulum triangulo LGH; (2) quare, & ſimile; eadem ratione, & ECD triangulum ſimile eſt triangulo LHK. Similia igitur polygona ABCDE, FGHKL in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia. dico, & homologa totis, hoc eſt, ut proportionalia ſint triangula, & antecedentia quidẽ eſſe ABE, EBC, ECD, conſequentia autem ipſorum FGL, LGH, LHK, & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habere ejus, quam latus homologum habet ad homologũ latus: hoc eſt AB ad FG; jungantur enim AC, FH. Et quoniam propter ſimilitudinem polygonorum angulus ABC eſt æqualis angulo FGH, atque eſt, ut AB ad BC, ita FG ad GH, erit triangulum ABC triangulo FGH æquiangulum, æqualis igitur eſt angulus quidem BAC angulo GFH, angulus vero BCA angulo GHF; præterea quoniam æqualis eſt BAM angulus angulo GFN, oſtenſus autem eſt, & ABM angulus æqualis angulo FGN; erit, & reliquus AMB reliquo

FNG

(2) 6. hujus.

FNG æqualis ; ergo æquiangulũ eſt ABM triangulum triangulo FGN; ſimiliter oſtẽdemus, & triangulum BMC triangulo GNH æquiangulum eſſe. ut igitur AM ad MB, ita eſt FN ad NG, & ut



BM ad MC, ita GN ad NH, quare, & ex æquali, ut AM ad MC, ita FN ad NH, Sed, ut AM ad MC, ita ABM triangulum ad triangulum MBC, & triangulũ AME ad ipſum EMC, inter ſe enim ſunt, ut baſes, (3) & ut unum antecedentium ad unum conſequẽtium, ita omnia antecedentia ad omnia conſequentia; (4) ut igitur AMB triangulum ad triangulum BMC, ita triangulum ABE ad ipſum CBE. Sed, ut AMB ad BMC, ita AM ad MC; (5) & ut igitur AM ad MC, ita ABE triangulum ad triangulum EBC. eadem ratione, & ut FN ad NH, ita FGL triangulum ad triangulum GLH; atque eſt, ut AM ad MC, ita FN ad NH; ergo, & ut triangulum ABE ad triangulũ BEC, ita triangulum FGL ad GHL triangulum: & permutando, ut ABE triangulum ad triangulũ FGL, ita triangulum EBC ad triangulum GHL Similiter oſtendemus junctis BD, GK, & ut BEC triangulum ad triangulum LGH, ita eſſe triangulum ECD ad triangulum LHK; & quoniam eſt, ut ABE triangulum

(3) 1.hujus. (4) 12.quinti. (5) 1.hujus.

lum ad triangulum FGL, ita triangulum EBC ad triangulum LGH, & adhuc triangulum ECD ad ipsũ LHK; erit, & ut unum antecedentium ad unum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, (6) ergo, ut triangulum ABE ad triãgulum FGL, ita ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL ſed ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem habet ejus, quam latus homologum AB habet ad homologum latus FG: ſimilia enim triangula in dupla ſunt proportione laterũ homologorum; (7) ergo, & ABCDE polygonum ad polygonum FGHKL duplam proportionem habet ejus, quam AB latus homologum habet ad FG homologum latus. Similia igitur polygona in ſimilia triangula dividuntur, & numero æqualia, & homologa totis, & polygonum ad polygonum duplam habet proportionem ejus, quam habet latus homologũ ad homologum latus. Quod oportebat demonſtrare.

Eodem modo, & in ſimilibus quadrilateris oſtendetur ea eſſe in dupla proportione laterum homologorum; oſtenſum autem eſt, & in triangulis.

(6) 12. quinti. (7) Ex antecedente.

COROLLARIUM PRIMUM.



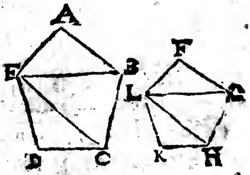
Ergo univerſæ ſimiles rectilineæ figuræ inter ſe sũt in dupla proportione homologorum laterum, & ſi ipſarum AB, FG tertiã proportionalem ſumamus, quæ ſit X; habebit AE ad X duplam proportionẽ ejus, quã habet AB ad FG; habet autem, & polygonũ ad

ad polygonum, & quadrilaterum ad quadrilaterum duplam proportionem ejus, quam latus homologum habet ad homologum latus, hoc eſt AB ad FG; atque oſtenſum eſt hoc in triangulis.

COROLLARIUM SECUNDUM.

Universè igitur manifeſtum eſt, ſi tres rectæ lineæ proportionales fuerint, ut prima ad tertiam, ita eſſe figuram, quæ fit à prima ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem, & ſimiliter deſcriptam; quod oſtendere oportebat.

Oſtendemus etiam aliter, & expeditius homologa eſſe triangula.



Exponâtur enim rurſus polygona ABCDE, FGHKL, & jungâtur, BE, EC, GL, LH. dico, ut ABE triangulum ad triangulum FGL, ita eſſe triangulum EBC ad triangulum LGH, & triangulum CDE ad ipſum HKL; quoniam enim ſimile eſt ABE triangulum triangulo FGL; habebit ABE triangulum ad triangulum FGL duplam proportionem ejus, quam habet BE ad GL. (1) eadem ra-

(1) Ex antecedente.

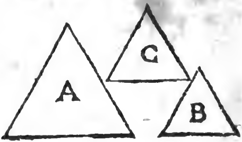
ratione, & triangulum BEC ad GLH triangulum duplam proportionem habet ejus, quam BE ad GL; eſt igitur, ut ABE triangulum ad triangulum FGL ita triangulum BEC ad GLH triangulum; (2) rurſus quoniam ſimile eſt triangulum EBC triangulo LGH, habebit EBC triangulum ad triangulum LGH duplã proportionem ejus, quam recta linea CE habet ad rectam HL; eadem ratione, & ECD triangulum ad triangulum LHK duplam proportionem habet ejus, quam CE ad HL; eſt igitur, ut triangulum BEC ad triangulum LGH, ita CED triangulum ad triangulũ LHK; oſtenſum autem eſt, & ut EBC triangulum ad triangulum LGH, ita triãgulum ABE ad triangulum FGL; ergo, & ut triangulum ABE ad triangulum FGL, ita triangulum BEC ad GLH triangulum, & triangulum ECD ad ipſum LHK; & ut igitur unum antecedentium ad unum conſequentium, ſic omnia antecedentia ad omnia conſequentia, (3) & reliqua, ut in priori demonſtratione. Quod ipſum demoſtrare oportebat.

(2) 11. quinti. (3) 12. quinti.

Theorema 15. Propoſitio 21. Quæ eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt.

SIt enim utrumque rectilineorum A, B ſimile rectilineo C; dico, & rectilineum A rectilineo B ſimile eſſe. Quoniam enim ſimile eſt A rectilineum rectilineo C, & ipſi æquiangulum erit, & circum

Q æqua-

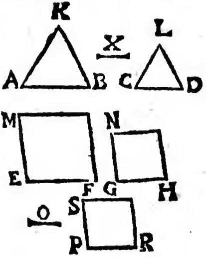


æquales angulos latera habebit proportionalia. Ruſus quoniam ſimile eſt rectilineũ B rectilineo C, æquiangulum ipſi erit, & circum æquales angulos latera proportionalia habebit. Utrumque igitur rectilineorum A, B ipſi C æquiangulum eſt, & circum æquales angulos latera habet proportionalia. Quare, & rectilineum A ipſi B eſt æquiangulum, lateraque circum æquales angulos proportionalia habet; ac propterea A ipſi B eſt ſimile. Quod demonſtrare oportebat.

Theorema 16. Propoſitio 22. Si quatuor recta lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia, & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt. Et ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia, & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ rectæ lineæ proportionales erunt.

SInt quatuor rectæ lineæ proportionales AB, CD, EF, GH, & ut AB ad CD, ita ſit EF ad GH; deſcribanturque ab ipſis quidem AB, CD ſimilia, & ſimiliter poſita rectilinea KAB, LCD: ab ipſis vero EF, GH deſcribantur rectilinea ſimilia, & ſimiliter poſita MF, NH. (1) Dico, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſſe rectilineum MF ad ipſum NH

(1) [illegible]



NH rectilineum. Sumatur enim ipſarum quidẽ AB, CD tertia proportionalis X; (2) ipſarum vero EF, GH tertia proportionalis O; & quoniam eſt, ut AB ad CD, ita EF ad GH: ut autem CD ad X ita GH ad O; erit ex æquali, ut AB ad X, ita EF ad O. Sed, ut AB quidem ad X, ita eſt rectilineum KAB ad LCD rectilineum, (3) ut autem EF ad O, ita rectilineum MF ad rectilineum NH. Ut igitur KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita eſt rectilineum MF ad NH rectilineum. (4) Sed ſit, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineũ MF ad rectilineum NH. Dico, ut AB ad CD, ita eſſe EF ad GH; fiat enim, ut AB ad CD, ita EF ad PR, (5) & deſcribatur ab ipſa PR alterutri rectilineorũ MF, NH ſimile, & ſimiliter poſitum rectilineum SR. Quoniam igitur eſt, ut AB ad CD, ita EF ad PR, & deſcripta ſunt ab ipſis quidem AB, CD ſimilia, & ſimiliter poſita KAB, LCD rectilinea, ab ipſis vero EF, PR ſimilia, & ſimiliter poſita rectilinea MF, SR, erit, ut KAB rectilineum ad rectilineum LCD, ita rectilineũ

(2) 11. hujus. (3) Cor. 20. hujus. (4) 11. quinti. (5) 12. hujus.

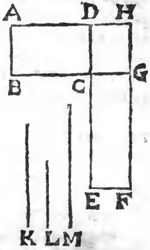
MF ad SR rectilineum, ponitur autem, & ut rectilineum KAB ad rectilineum LCD, ita MF rectilineũ ad rectilineum NH. ergo, ut rectilineum MF ad rectilineum NH, ita MF rectilineum ad rectilineũ SR. Quòd cum rectilineum MF ad utrumque ipſorum NH, SR eandem habeat proportionem, erit rectilineum NH ipſi SR æquale; (6) eſt autem ipſi ſimile, & ſimiliter poſitũ. Ergo GH eſt æqualis PR. Et quoniam, ut AB ad CD, ita eſt EF ad PR, æqualis autem PR ipſi GH; erit, ut AB ad CD, ita EF ad GH. Si igitur quatuor rectæ lineæ proportionales fuerint, & rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia, & ſimiliter deſcripta proportionalia erunt, & ſi rectilinea, quæ ab ipſis fiunt, ſimilia, & ſimiliter deſcripta proportionalia fuerint, & ipſæ rectę lineę proportionales erãt. Quod oportebat demonſtrare.

(6) 9. quinti.

Theorema 17. *Propoſitio* 23. *Æquiangula parallelogrãma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam.*

SInt æquiangula parallelogramma AC, CF æqualem habentia BCD angulum angulo ECG. Dico parallelogrammum AC ad parallelogrammum CF proportionem habere compoſitam ex lateribus, videlicet compoſitam ex proportione, quam habet BC ad CG, & ex proportione quam DC habet ad CE. Ponatur enim, ut BC ſit in directum ipſi CG; ergo, &

DC

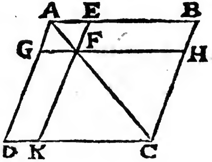


DC ipſi CE in directum erit: (1) & compleatur DG parallelogrammum: exponaturque recta linea quædam K, & fiat, ut BC quidem ad CG, ita K ad L, (2) ut autem DC ad CE, ita L ad M; proportiones igitur ipſis K ad L, & L ad M eædem ſunt, quæ proportiones laterum, videlicet BC ad CG, & DC ad CE. Sed proportio K ad M compoſita eſt ex proportione K ad L, & proportione L ad M quare, & K ad M; proportionem habet ex lateribus compoſitam. Et quoniam eſt, ut BC ad CG, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH; (3) ſed, ut BC ad CG, ita K ad L: erit, & ut K ad L, ita parallelogrammum AC ad CH parallelogrammum (4) Rurſus quoniam eſt, ut DC ad CE, ita CH parallelogrammum ad parallelogrãmum CF: ut autem DC ad CE, ita L ad M, & ut L ad M, ita erit parallelogrammum CH ad CF parallelogrãmum. (5) Itaque cum oſtenſum ſit, ut K quidem ad L, ita AC parallelogrammum ad parallelogrammum CH: ut autem L ad M, ita parallelogrammum CH ad CF parallelogrammum; erit ex æquali, ut K ad M, ita AC parallelogrammum ad ipſum CF;

(1) 14. primi. (2) 12. hujus. (3) 1. hujus.
(4) 11. quinti. (5) 11. quinti.

habet autem K ad M proportionem ex lateribus cōpoſitam; ergo, & AC parallelogrammum ad parallelogrammum CF proportionem habebit compoſitam ex lateribus; æquiangula igitur parallelogramma inter ſe proportionem habent ex lateribus compoſitam. Quod oportebat demonſtrare.

Theorema 18. *Propoſitio* 24. *Omnis parallelogrammi, quæ circa diametrum ſunt parallelogramma, & toti, & inter ſe ſimilia ſunt.*



Sit parallelogrammum ABCD, cujus diameter AC: circa diametrum vero AC parallelogramma ſint EG, HK. Dico parallelogramma EG, HK, & toti ABCD, & inter ſe ſimilia eſſe. Quoniam enim uni laterum trianguli ABC, videlicet ipſi BC parallela ducta eſt EF, erit, ut BE ad EA, ita CF ad FA. (1) Rurſus quoniā uni laterum trianguli ACD, nempè ipſi CD ducta eſt parallela FG, ut CF ad FA, ita erit DG ad GA; ſed, ut CF ad FA; ita oſtenſa eſt, & BE ad EA; ergo, & ut BE ad EA, ita DG ad GA, (2) componendoque, ut BA ad AE, ita DA ad AG, & permutando, ut BA ad AD, ita EA ad AG; parallelogrammorum igitur ABCD, EG latera, quæ circa com-

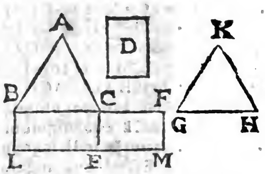
(1) 2. hujus. (2) 11. quinti.

communem angulum BAD proportionalia ſunt. Et quoniam parallela eſt GF ipſi DC, angulus quidem AGF eſt æqualis angulo ADC,(3) angulus vero GFA æqualis angulo DCA, & angulus DAC eſt communis duobus triangulis ADC, AGF; erit triangulum ADC triangulo AGF æquiangulum. Eadem ratione, & triangulum ACB æquiangulum eſt triangulo AFE; (4) totum igitur parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG eſt æquiangulum; ergo, ut AD ad DC, ita AG ad GF, ut autem DC ad CA, ita GF ad FA, & ut AC ad CB, ita AF ad FE, & prætereà, ut CB ad BA, ita FE ad EA. Itaque quoniam oſtenſum eſt, ut DC ad CA, ita eſſe GF ad FA, ut autem AC ad CB, ita AF ad FE; erit ex æquali, ut DC ad CB, ita GF ad FE; ergo parallelogrammorum ABCD, EG porportionalia ſunt latera, quæ circum æquales angulos, ac proptereà parallelogrammum ABCD parallelogrammo EG eſt ſimile. Eadem ratione, & parallelogrammum ABCD ſimile eſt parallelogrammo KH. Utrumque igitur ipſorum EG, HK parallelogrammorum parallelogrammo ABCD eſt ſimile; quæ autem eidem rectilineo ſunt ſimilia, & inter ſe ſimilia ſunt; (5) parallelogrammum igitur EG ſimile eſt parallelogrammo HK. Quare omnis parallelogrammi, quæ circa diametrū ſunt parallelogrāma, & toti, & inter ſe ſunt ſimilia. Quod oſtendere oportebat.

(3) 29. primi. (4) 4. hujus. (5) 21. hujus.

Problema 7. Propoſitio 25. Dato rectilineo ſimile, & alteri dato æquale idem conſtituere.

 Sit



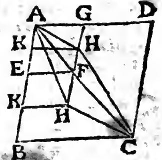
Sit datum quidē rectilineū, cui oportet ſimile conſtituere ABC, cui autem æquale ſit D; oportet ipſi ABC ſimile, & ipſi D æquale idem conſtituere; applicetur enim ad rectam quidem lineam BC triangulo ABC æquale parallelogrammum BE; (1) ad rectam vero CE applicetur parallelogrammum CM æquale ipſi D, in angulo FCE, qui CBL angulo eſt æqualis; in directum igitur eſt BC ipſi CF, & LE ipſi EM. (2) Sumatur ipſarum BC, CF media proportionalis GH, (3) & ab ipſa GH deſcribatur triangulum KGH ſimile, & ſimiliter poſitum triangulo ABC. (4) Et quoniam eſt, ut BC ad GH, ita GH ad CF, ſi autem tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam, ita eſt figura, quæ fit à prima, ad eam, quæ à ſecunda, ſimilem, & ſimiliter deſcriptam, (5) erit, ut BC ad CF, ita ABC triangulum ad triangulum KGH; ſed, & ut BC ad CF, ita parallelogrammū BE ad EF parallelogrammum, & ut igitur triangulum ABC ad triangulum KGH, ita BE parallelogrammū ad parallelogrammum EF. (6) Quare permutando, ut ABC triangulum ad parallelogrammum BE, ita triangulum

---

(1) 44. primi. (2) 14 primi. (3) 13. hujus.
(4) 18. hujus. (5) Cor. 19. hujus. (6) 11. quinti.

triangulum KGH ad EF parallelogrammum; eſt autem triangulum ABC æquale parallelogrammo BE; æquale igitur eſt, & KGH triangulum parallelogrãmo EF. Sed EF parallelogrammum æquale eſt rectilineo D; ergo, & triangulum KGH ipſi D eſt æquale, eſt autem KGH ſimile triangulo ABC. Dato igitur rectilineo ABC ſimile, & alteri dato æquale idem conſtitutum eſt KGH. Quod facere oportebat.

Theorema 19. Propoſitio 26. Si à parallelogrãmo parallelogrãmũ auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitũ, cõmunem ipſi angulũ habens, circa eandẽ diametrum eſt toti.



A Parallelogrammo enim ABCD parallelogrãmũ AF auferatur, ſimile ipſi ABCD, & ſimiliter poſitũ cõmunemque ipſi angulum habens DAB; dico parallelogrãmum ABCD circa eãdem eſſe diametrum parallelogrammo AF. Nõ enim: ſed ſi fieri poteſt, ſit ipſorum diameter AHC, & producatur GF uſque ad H; ducaturque per H alterutri ipſarum AD, BC parallela HK. Quoniam igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrãmo KG; & erit parallelogrammum ABCD parallelogrãmo KG ſimile; (1) ergo, ut DA ad AB, ita GA ad AK. (2) eſt autem, & propter ſimilitudinem parallelogrãmorum ABCD, EG, ut DA ad AB, ita GA ad AE, & ut

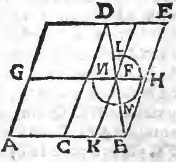
(1) 22. hujus. (2) 1. diff. hujus.

& ut igitur GA ad AE, ita GA ad AK. (3) Quòd cũ GA ad utramque ipſarum AK, AE eandem proportionem habeat, erit AE ipſi AK æqualis, (4) minor majori, quod fieri non poteſt; non igitur circa eandem diametrum eſt ABCD parallelogrammum parallelogrammo AH. Quare circa eandem diametrum erit ipſi AF. Si igitur à parallelogrammo parallelogrammum auferatur ſimile toti, & ſimiliter poſitũ, communem ipſi angulum habens, circa eandem diametrum eſt toti. Quod demonſtrare oportebat.

---

(3) 11. quinti. (4) 9. quinti.

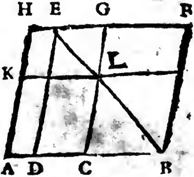
Theorema 20. Propoſitio 27. Omnium parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficiẽtium figuris parallelogrãmis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ei, quæ à dimidia deſcribitur, maximũ eſt, quod ad dimidiam eſt applicatum, ſimile exiſtens defectui.



Sit recta linea AB, ſeceturque bifariam in C; & ad AB rectam lineã applicetur parallelogrammũ AD deficiens figura parallelogramma DB, ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ à dimidia ipſis AB deſcripta eſt hoc eſt à CB. Dico omnium parallelogrammorum ad rectã lineam AB applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ipſi DB, maximum eſſe AD. applicetur enim ad rectam lineam AB paral-

rallelogrammum AF, deficiens figura parallelogrā-ma FB ſimili, & ſimiliter poſita ipſi DB, dico AD parallelogrammum parallelogrammo AF majus eſſe. Quoniam enim ſimile eſt parallelogrammum DB parallelogrammo FB, circa eandem diametrum ſunt. (1) Ducatur eorum diameter DB, & deſcribatur figura; quoniam igitur CF eſt æquale ipſi FE, (2) commune apponatur FB; totum igitur CH toti KE eſt æquale. Sed CH eſt æquale CG, quoniam, & recta linea AC ipſi CB; (3) ergo, & GC ipſi EK æquale erit; commune apponatur CF; totum igitur AF eſt æquale gnomoni LMN, quare, & DB hoc eſt AD parallelogrammum, parallelogrammo AF eſt majus; omnium igitur parallelogrammorum ad eandem rectam lineam applicatorum, & deficientium figuris parallelogrammis ſimilibus, & ſimiliter poſitis ei, quæ à dimidia deſcribitur, maximum eſt, quod ad dimidiā eſt applicatū. Quod demonſtrare oportebat.

(1) Ex antecedente. (2) 43. primi. (3) 36. primi.



Alitèr. Sit .n. rurſus AB ſecta bifariam in pūcto C, & applicatum ſit AL, deficiens figura LB, & rurſus ad rectam lineam AB applicetur parallelogrammū AE deficiens figura EB ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ à dimidia AB deſcribitur, videlicet ipſi LB. Dico parallelogrammum AL

quod

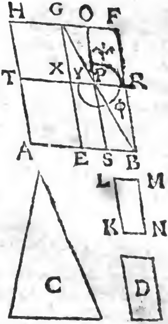
quod ad dimidiam eſt applicatum majus eſſe parallelogrammo AE. Quoniam enim ſimile eſt EB ipſi LB, circa eandem ſunt diametrum; (1) ſit ipſorum diameter EB, & deſcribatur figura. Et quoniam LF æquale eſt LH, etenim FG ipſi GH eſt æqualis; (2) erit LF ipſo EK majus; eſt autem LF æquale DL. (3) majus igitur eſt, & DL ipſo EK: cōmune apponatur KD; ergo totum AL toto AE eſt majus; quod oportebat demonſtrare.

(1) 24. ſexti. (2) 36. primi. (3) 43. primi.

Problema 8. Propoſitio 28. Ad datam rectam lineā dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ; oportet autem datum rectilineum, cui æquale applicandum eſt, non majus eſſe eo, quod ad dimidiam applicatur, ſimilibus exiſtentibus defectibus, & eo quod à dimidia, & eo, cui oportet ſimile deficere.

SIt data quidem recta linea AB: datum autem rectilineum, cui oportet æquale ad datam rectā, lineam AB applicare, ſit C, non majus exiſtens eo, quod ad dimidiam applicatum eſt, ſimilibus exiſtētibus defectibus: cui autem oportet ſimile deficere ſit D; oportet ad datam rectam lineam AB, dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, deficiens figura parallelogrāma, quæ ſimilis ſit ipſi D. Secetur AB bifariam in E, & ab ipſa EB deſcribatur ſimile, & ſimiliter poſitū ipſi D; (1) quod ſit EBFG, & com-

(1) 18. hujus.



& cõpleatur AG parallelogrãmum, itaque AG, vel ęquale eſt ipſi C, vel eo majus, ob determinationem, & ſi quidem AG ſit ęquale C, factum jam erit, quod proponebatur: etenim ad rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammũ AG applicatũ eſt, deficiens figura parallelogramma GB, ipſi D ſimili. Si autem non eſt æquale, erit HE majus quàm C; atque eſt HE æquale GB; ergo, & GB quã C eſt majus; quo autẽ GB ſuperat C, ei exceſſui æquale, ipſi vero D ſimile, & ſimiliter poſitũ idẽ conſtituatur KLMN; (2) ſed D eſt ſimile GB; quare, & KM ipſi GB ſimile erit; ſit igitur recta linea quidẽ KL homologa ipſi GE, LM vero ipſi GF; & quoniam æquale eſt GB ipſi C, KM, erit GB ipſi KM majus; major igitur eſt recta linea GE ipſa KL; & GF ipſa LM; ponatur GX æqualis KL, & GO æqualis LM, & compleatur XGOP parallelogrãmum; æquale igitur eſt, & ſimile GP ipſi KM; ſed KM ſimile eſt GB; ergo, & GP ipſi GB eſt ſimile, (3) circa eandem igitur eſt diametrũ GP ipſi GB; (4) ſit ipſorum diameter GPB,

(2) 25. hujus. (3) 21. hujus. (4) 26. hujus.

& figura deſcribatur; itaque quoniam GB eſt æquale ipſis C, KM, quorum GP eſt æquale KM, erit reliquus YΦΨ gnomon æqualis reliquo C, & quoniam OR eſt æquale XS, (5) commune apponatur PB; totum igitur, OB toti XB eſt æquale, ſed XB eſt æquale TE, quoniam, & latus AE lateri EB; (6) quare, & TE ipſi OB æquale; commune apponatur XS; ergo totũ TS eſt æquale toti gnomoni YΦΨ. At YΦΨ gnomon ipſi C oſtenſus eſt æqualis; & TS igitur ipſi C æquale erit. Quare ad datam rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum TS applicatũ eſt, deficiens figura parallelogramma PB ipſi D ſimili, quoniam, & PB ſimile eſt ipſi GP. Quod facere oportebat.

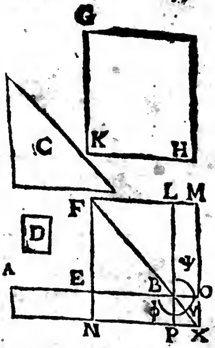
(5) 43. primi. (6) 36. primi.

Problema 9. Propoſitio 29. Ad datam rectam lineam dato rectilineo æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma, quæ ſimilis ſit alteri datæ.

SIt data recta linea AB, datum vero rectilineum cui oportet æquale ad ipſam AB applicare, ſit C, cui autem oportet ſimile excedere, D; itaque oportet ad AB rectam lineam dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicare, excedens figura parallelogramma ſimili D. Secetur AB bifariam in E, atque ex EB ipſi D ſimile, & ſimiliter poſitum parallelogrammum deſcribatur BF, (1) & utriſque quidẽ

BF;

(1) 18. hujus.



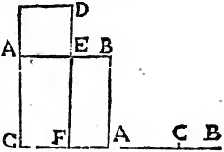
BF, C, æquale, ipſi vero D, ſimile, & ſimiliter poſitum idem conſtituatur GH. (2) Simile igitur eſt GH ipſi FB. Sitque KH quidē latus homologum lateri FL, KG vero ipſi FE. Et quoniam parallelogrammum GH majus eſt ipſo FB, erit recta linea KH major quàm FL, & KG major quàm FE; producantur FL, FE, & ipſi quidem KH æqualis ſit FLM, ipſi vero KG ęqualis FEN, & compleatur MN parallelogrammum; ergo MN æquale eſt, & ſimile ipſi GH. Sed GH eſt ſimile EL, & MN igitur ipſi EL ſimile erit; (3) ac propterea circa eandem diametrum eſt EL ipſi MN. (4) Ducatur ipſorum diameter FX, & figura deſcribatur. Itaque quoniam GH ipſis EL, C, eſt æquale, ſed GH eſt æquale MN erit, & MN æqualis ipſis EL, C; cōmune auferatur EL, reliquus igitur ΨΥΦ gnomon ipſi C eſt æqualis. Et quoniam AE eſt æqualis EB, æquale erit, & AN parallelogrammum parallelogrāmo NB, hoc eſt ipſi LO; commune apponatur EX; to-

(2) 25.hujus. (3) 21.hujus. (4) 26.hujus.

totũ igitur AX æquale eſt gnomoni ΦΥΨ. Sed ΦΥΨ gnomon eſt æqualis C; ergo, & AX ipſi C erit æquale. Ad datam igitur rectam lineam AB dato rectilineo C æquale parallelogrammum applicatũ eſt AX, excedens figura parallelogramma PO ipſi D ſimili, quoniam, & ipſi EL ſimile eſt OP. (5) Quod feciſſe oportebat.

(5) 24.hujus.

Problema 10. *Propoſitio* 30. *Datam rectam lineam terminatam extrema, ac media ratione ſecare.*



SIt data recta linea terminata AB; oportet ipſã AB extrema, ac media ratione ſecare. Deſcribatur enim ex AB quadratũ BC, (1) & ad AC ipſi BC æquale parallelogrãmum applicetur CD, excedens figura AD ipſi BC ſimili. (2) Quadratum autem eſt BC; ergo, & AD quadratum erit. Et quoniam BC eſt æquale CD; commune auferatur CE; reliquum igitur BF reliquo AD eſt æquale: eſt autẽ, & ipſi æquiangulum; ergo ipſorum BF, AD latera, quæ circum æquales angulos, ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent, (3) ut igitur FE ad ED, ita eſt AE ad

(1) 46.primi. (2) Ex antecedente. (3) 14.hujus.

ad EB; eſt autẽ FE æqualis AC, (4) hoc eſt ipſi AB, & ED ipſi AE; quare,ut BA ad AE, ita AE ad EB. Sed AB major eſt, quam AE ; ergo AE quam EB eſt major. (5) Recta igitur linea AB extrema,ac media ratione ſecta eſt in E ; & major ipſius portio eſt AE, quod facere oportebat.

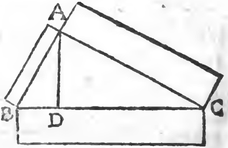
ALITER. Sit data recta linea AB; oportet ipſã AB extrema, ac media ratione ſecare. Secetur enim AB in C , ita ut rectangulum , quod continetur AB, BC æquale ſit quadrato, ex AC. (6) Quoniam igitur rectangulum ABC æquale eſt quadrato ex AC, erit, ut BA ad AC, ita AC, ad CB, (7) ergo AB recta linea extrema, ac media ratione ſecta eſt ; Quod facere oportebat.

---

(4) 34. primi. (5) 14. quinti. (6) 11 ſecund. (7) 17. hujus.

Theorema 21. Propoſitio 31. In rectangulis triangulis figura, quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis.

SIt triangulum rectangulum ABC, rectum habens angulum BAC. Dico figurã,quæ fit ex BC æqualem eſſe eis, quæ ex BA, AC fiunt, ſimilibus,& ſimiliter deſcriptis. Ducatur perpendicularis AD. Quoniam igitur in triangulo rectangulo ABC ab angulo recto, qui eſt ad A ad BC baſim perpendicularis ducta eſt AD, erunt triangula ABD, ADC, quæ ſunt ad



perpendicularem ſimilia toti ABC, & inter ſe ſe. (1) Et quoniam ſimile eſt ABC triangulũ triãgulo ABD, erit, ut CB ad BA, ita AB ad BD; quod cum tres rectæ lineæ proportionales ſint, ut prima ad tertiam, ita erit figura, quæ fit ex prima ad eam, quæ ex ſecunda, ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. (2) Ut igitur CB ad BD, ita figura, quæ fit ex CB ad eam, quæ ex BA, ſimilem, & ſimiliter deſcriptam. Eadem ratione, & ut BC ad CD. ita figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex CA; quare, & ut BC ad ipſas BD, DC, ita figura, quæ ex BC ad eas, quæ ex BA, AC, ſimiles, & ſimiliter deſcriptas; æqualis autem BC ipſis BD, DC; ergo figura, quæ fit ex BC æqualis eſt eis, quæ ex BA, AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis. In rectangulis igitur triangulis, figura, quæ fit à latere rectum angulum ſubtendente, æqualis eſt eis, quæ à lateribus rectum angulum continentibus fiunt ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis; quod oſtendere oportebat.

ALITER. Quoniam ſimiles figuræ ſunt in dupla proportione laterum homologorum; (3) figura, quæ fit ex BC ad eam, quæ ex BA duplam proportionem habebit ejus, quam habet BC ad BA; habet au-

(1) 8.hujus. (2) Coro.20.hujus. (3) 20.hujus.

autem, & quadratum ex BC, ad quadratum ex BA duplam proportionem ejus, quam BC ad BA; ergo, & ut figura quæ ex BC ad eam, quæ ex BA, ita quadratum ex BC ad quadratum ex BA; eadem ratione, & ut figura, quæ ex BC ad eam, quæ ex CA, ita quadratum, quod ex BC ad illud, quod ex CA quadratum, & ut igitur figura quæ ex BC ad eas, quæ ex BA, AC, ita quod ex BC quadratum ad quadrata, quæ ex BA, AC; (4) quadratum autem, quod ex BC æquale eſt eis, quæ ex BA, AC quadratis; (5) ergo, & figura, quæ fit ex BC eſt æqualis eis, quæ ex BA, AC fiunt, ſimilibus, & ſimiliter deſcriptis; quod oſtendere oportebat.

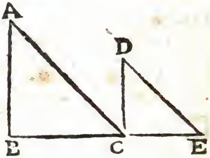
(4) 12. quinti. (5) 47. primi.

Theorema 22. Propoſitio 32. Si duo triangula componãtur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela, reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt.

Sint duo triangula ABC, DCE, quæ duo latera BA, AC, duobus lateribus CD, DE proportionalia habeant, ut ſit ſicut BA ad AC; ita CD ad DE; parallela autem ſit AB ipſi DC, & AC ipſi DE. Dico BC ipſi CE in directum eſſe. Quoniam enim AB parallela eſt DC, & in ipſas incidit recta linea AC; erũt anguli alterni BAC, ACD ęquales inter ſe ſe. (1)

R 2 Ea-

(1) 29. primi.

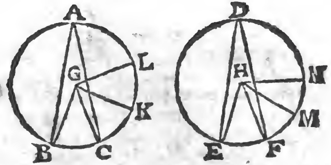


Eadem ratione,& angulus CDE æqualis eſt angulo ACD; quare, & BAC ipſi CDE eſt æqualis. & quoniã duo triãgula sũt ABC, DCE, unum angulũ, qui ad A, uni angulo, qui ad *D* æqualem habentia, circum æquales autem angulos latera proportionalia, quod ſit, ut BA ad AC, ita CD ad DE; erit triangulum ABC triangulo DCE æquiangulum; (2) ergo ABC angulus eſt æqualis angulo DCE; oſtenſus autem eſt, & angulus ACD æqualis angulo BAC; totus igitur ACE duobus ABC, BAC eſt æqualis; communis apponatur ACB; ergo anguli ACE, ACB angulis BAC, ACB, CBA æquales ſunt. Sed BAC, ACB, CBA anguli duobus rectis ſunt æquales; & auguli igitur ACE, ACB duobus rectis æquales erunt; itaque ad quandam rectam lineam AC, & ad punctum in ipſa C duæ rectæ lineæ BC, CE non ad eaſdem partes poſitæ angulos, qui deinceps ſunt ACE, ACB duobus rectis æquales efficiunt; ergo BC ipſi CE in directum erit. (3) Si igitur duo triangula componantur ad unum angulum, quæ duo latera duobus lateribus proportionalia habeant, ita ut homologa latera ipſorum etiam ſint parallela; reliqua triangulorum latera in directum ſibi ipſis conſtituta erunt. Quod demonſtrare oportebat. *Theo-*

(2) 6.hujus. (3) 14.primi.

Theorema 23. Propoſitio 33. In circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtunt, ſiue ad centra, ſiue ad circumferentias inſiſtant. Adhuc autem, & ſectores, quippè qui ad centra ſunt conſtituti.

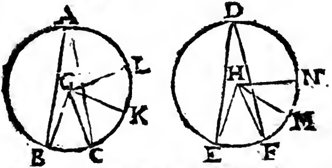
Sint æquales circuli ABC, DEF; & ad centra quidem ipſorum G,H ſint anguli BGC,EHF, ad circumferentias verò anguli BAC, EDF. dico,ut circū-



ferentia BC ad EF circumferentiam, ita eſſe,& BGC angulum ad angulum EHF, & angulum BAC ad angulum EDF: & adhuc ſectorem BGC ad EHF ſectorem. ponantur enim circumferentiæ quidē BC æquales quotcumque deinceps CK, KL; circumferentiæ vero EF, rurſus æquales quotcumque FM, MN: & jungantur GK,GL,HM,HN; quoniam igitur circumferentiæ BC,CK,KL inter ſe ſunt æquales, & anguli BGC, CGK, KGL inter ſe æquales erunt. (1) quotuplex igitur eſt circumferentia BL circumferentiæ BC,

(1) 27.tertii.

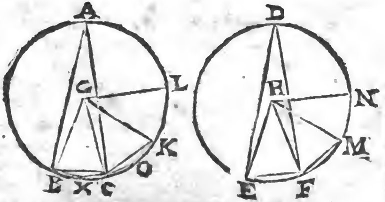
BC, totuplex eſt, & BGL angulus anguli BGC; eadē ratione, & quotuplex eſt circumferentia NE circū-



ferentiæ EF, totuplex, & EHN angulus anguli EHF. Si igitur æqualis eſt BL circumferentia circumferentiæ EN, & angulus BGL angulo EHN erit æqualis, & ſi circumferentia BL major eſt circumferentia EN, major erit, & BGL angulus angulo EHN, & ſi minor, minor. quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus nimirum circumferentijs BC, EF; & duobus angulis BGC, EHF, ſumpta ſunt circumferentiæ quidem BC, & BGC anguli æque-multiplicia, videlicet circumferentia BL, & BGL angulus; circumferentiæ vero EF, & EHF anguli æque multiplicia, nempè circumferentia EN, & angulus EHN; atque oſtenſum eſt ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, & BGL angulum ſuperare angulum EHN, & ſi æqualis, æqualem, & ſi minor, minorem eſſe. Ut igitur circumferentia BC ad EF circumferentiam, ità angulus BGC ad angulū EHF. (2) Sed

(2) Diff. 5 quinti.

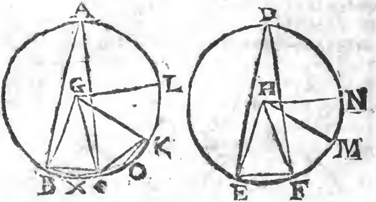
Sed, ut BGC angulus ad angulum EHF, ita angulus BAC ad EDF angulum; (3) uterque enim utriuſque eſt duplus; (4) & ut igitur BC circumferentia ad circumferētiam EF, ita & angulus BGC ad angulum EHF, & angulus BAC ad EDF angulum; quarè in circulis æqualibus anguli eandem habent proportionem, quam circumferentiæ, quibus inſiſtunt, ſiuè ad centra, ſiuè ad circumferentiam inſiſtant. Dico inſuper, & ut BC circumferentia ad circumferentiā EF, ita eſſe ſectorem GBC ad HEF ſectorem. jungantur enim BC, CK, & ſumptis in circumferentiis BC, CK: punctis X, O, jungantur, & BX, XC, CO, OK; itaque quoniam duæ BG, GC duabus CG, GK æquales ſunt,



& angulos æquales continent; erit, & baſis BC baſi CK æqualis; æquale igitur eſt, & GBC triangulum triangulo GCK. (5) & quoniam circumferentia BC cir-

(3) 15. quinti. (4) 20. tertii. (5) 4. primi.

circumferentiæ CK eſt æqualis, & reliqua circumferentia, quæ complet totum circulum ABC æqualis eſt reliquæ, quæ eundem circulum complet; quare, & angulus BXC angulo COK eſt æqualis; ſimilis igitur eſt BXC portio portioni COK, & ſunt in æqualibus rectis lineis BC, CK, quæ autem in æqualibus rectis lineis ſimiles circulorum portiones, & inter ſe æqua-



les ſunt; ergo portio BXC eſt æqualis portioni COK: eſt autem, & BGC triangulum triangulo CGK æquale, & totus igitur ſector BGC toti ſectori CGK æqualis erit: eadem ratione, & GKL ſector utrique ipſorũ GKC, GCB eſt æqualis, tres igitur ſectores BGC, CGK, KGL æquales ſunt inter ſe. Similiter, & ſectores HEF, HFM, HMN inter ſe ſunt æquales; quotuplex igitur eſt LB circumferentia circumferentiæ BC, totuplex eſt, & GBL ſector ſectoris GBC; eadem ratione, & quotuplex eſt circumferentia NE circumferẽtiæ EF totuplex eſt, & HEN ſector ſectoris HEF; quare ſi circumferentia BL circumferentiæ EN eſt

æqua-

A01 1462593

Digitized by Google

æqualis: & ſector BGL æqualis eſt ſectori EHN; & ſi circumferentia BL ſuperat circumferentiam EN, ſuperat, & BGL ſector ſectorem EHN: & ſi minor minor. Quatuor igitur exiſtentibus magnitudinibus, duabus quidem BC, EF circumferentiis, duobus vero ſectoribus GBC, EHF, ſumpta ſũt æque multiplicia, circumferentiæ quidem BC, & GBC ſectoris, circumferentia BL, & GBL ſector; circumferentiæ vero EF, & ſectoris HEF æque multiplicia circumferẽtia EN, & HEN ſector; atque oſtenſum eſt ſi BL circumferẽtia ſuperat circumferentiam EN, & ſectorem BGL ſuperare ſectorem EHN; & ſi æqualis, æqualem eſſe; & ſi minor minorem: eſt igitur, ut BC circumferentia ad circumferentiam EF, ita ſector GBC ad HEF ſectorem. Quod oſtendere oportebat.

COROLLARIUM.

Perſpicuum etiam eſt, & ut ſector ad ſectorem, ita eſſe angulum ad angulum.

Finis Libri Sexti.

Digitized by Google

Def. 6.

Parallelogrammum 2.um aliquam rectam lineam applicatum, deficere dicitur parallelogrammo, quando non occupat totam rectam lineam. Excedere vero, quod occupat maiorem lineam, quam sit ea, 2.um quam applicatur, ita tamen ut parallel.um deficiens, aut excedens eandem habeat altitudinem cum parallel.mo applicato, constituatque cum eo totum unum parallelogrammum.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BI